

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**TESIS**

**“CARACTERIZACIÓN DEL VÓRTICE DE SALIDA DE UN ALA  
RECTANGULAR MEDIANTE DINÁMICA DE FLUIDOS  
COMPUTACIONAL (CFD)”**

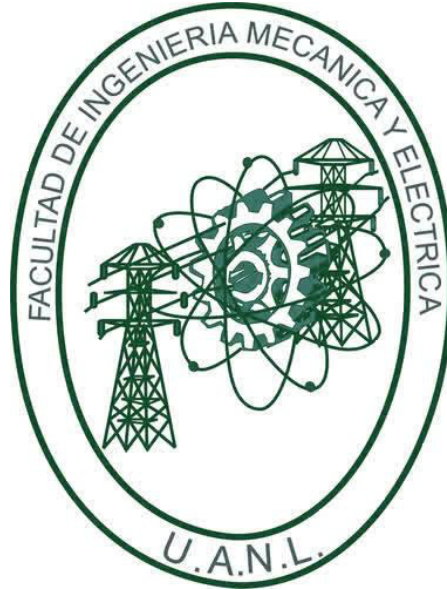
**POR**

**L.F. ANDRÉS FRANCISCO PATIÑO BAZALDÚA**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y RENOVABLE**

**MAYO, 2017**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**TESIS**

**“CARACTERIZACIÓN DEL VÓRTICE DE SALIDA DE UN ALA  
RECTANGULAR MEDIANTE DINÁMICA DE FLUIDOS  
COMPUTACIONAL (CFD)”**

**POR**

**L.F. ANDRÉS FRANCISCO PATIÑO BAZALDÚA**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y RENOVABLE**

**DIRECTOR: DR. FAUSTO ALEJANDRO SÁNCHEZ CRUZ  
CO-DIRECTOR: DR. SIMÓN MARTÍNEZ MARTÍNEZ**

**MAYO, 2017**

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Subdirección de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Caracterización del vórtice de salida de un ala rectangular mediante Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)», realizada por el estudiante Lic. Andrés Francisco Patiño Bazaldúa, con número de matrícula 1260455, sea aceptada para su defensa en opción al grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con Orientación en Energías Térmica y Renovable.


El Comité de Tesis




Dr. Fausto Alejandro Sánchez Cruz  
Director



Dr. Simón Martínez Martínez  
Co-Director

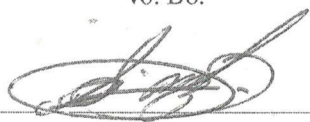


Dr. Santos Méndez Díaz  
Revisor



Dr. Alfredo Arias Montaña  
Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado

**San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Mayo 2017**

*Creo firmemente que el mejor y mayor momento de cualquier hombre, su logro más grande y su mayor satisfacción, es aquel momento sublime en que después de haber trabajado arduamente con todo su empuje, esfuerzo, dedicación y corazón a favor de una causa noble, se encuentra exhausto en el campo de batalla, "¡Victorioso!"*

---

Vince Lombardi (Head Coach de los Green Bay Packers)



## **Agradecimientos.**

Principalmente le doy gracias a mis padres Yolanda Bazaldúa Rangel y Adan González Martínez por apoyarme incondicionalmente en todo, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

A mis hermanos J. Oswaldo Patiño, Yuliana G. González. y Cristina L. González por ser parte de mi vida y representar la unidad familiar, sobre todo por su paciencia y amor incondicional.

A mis amigos: Anhuart Martínéz, Luis Enrique Gallegos, Israel Nuñez, Angel Quezada, Alejandro Quevedo, Sheyla Cruz, Gabriela Salazar, Magye Montell, J. E. Camacho, Jessica Casanova, Adrian M. Cobos, Yonnatan Loredó, Carlos Uder y Jesús Cantú quienes forman parte de mi vida y siempre me animaron cuando las cosas no salían de la mejor manera y nunca dejaron que me diera por vencido.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, especialmente al Grupo de Energías Térmica y Renovable (GETR) por abrirme sus puertas y haberme dado la oportunidad de trabajar en tantos proyectos, especialmente en la investigación para la realización de mi tesis.

A la Empresa Ankura Desarrollos Aeronáuticos y Regio Metrology por haberme otorgado la beca para realizar este proyecto.

A mi asesor, el Dr. Fausto Alejandro Sánchez Cruz por todas sus enseñanzas dentro y fuera del aula de clases y por haberme asesorado y guiado a través de esta investigación.

Le agradezco la confianza, apoyo y dedicación a mis profesores que ayudaron en mi formación y compartieron gran parte de sus conocimientos conmigo, sobre todo el Dr. Simón Martínez por su apoyo durante toda la maestría, al Dr. Arturo Fuentes, Dr. Santos Méndez y la Dra. Elvira Martínez por sus excelentes clases y los conocimientos transferidos.

A todos mis compañeros pilotos e instructores, por haberme guiado por la pasión a la aviación y por compartir parte de su experiencia y conocimientos conmigo. Al Capitán Aviador Jorge Jacobo por ser un ejemplo de desarrollo profesional a seguir, por impulsarme a mantener mi sueños y el ánimo para continuar con mis estudios.

Agradezco a cada uno de ustedes quienes creyeron en mí y me impulsaron para terminar cada una de mis metas y sueños propuestos.

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Resumen</b>	<b>1</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>4</b>
2.1. Introducción . . . . .	4
2.2. Estado del Arte . . . . .	7
2.2.1. Estudios Experimentales . . . . .	8
2.2.2. Estudios Numéricos . . . . .	17
2.3. Hipótesis . . . . .	20
2.4. Objetivos . . . . .	20
2.4.1. Objetivo General . . . . .	20
2.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	20
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>22</b>
3.1. Ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos . . . . .	22

---

3.1.1.	Ecuación de la Conservación de Masa . . . . .	23
3.1.2.	Ecuación de Conservación de la Cantidad de Movimiento . . . . .	24
3.1.3.	Ecuación de la Energía . . . . .	27
3.2.	Ecuaciones promediadas para flujos turbulentos . . . . .	29
3.2.1.	Ecuaciones de Navier-Stokes Promediadas de Reynolds . . . . .	30
3.2.2.	Forma de Reynolds de la Ecuación de Continuidad . . . . .	32
3.3.	Principios Aerodinámicos y Leyes de Movimiento del Vórtice de Salida .	43
3.3.1.	Características de un Perfil Aerodinámico . . . . .	43
3.3.2.	Teoría Clásica de Línea de Sustentación de Prandtl . . . . .	49
3.3.3.	Análisis de Vórtices Laminares . . . . .	55
3.3.4.	Análisis de Vórtices Turbulentos . . . . .	58
<b>4.</b>	<b>Modelado de la Turbulencia</b>	<b>59</b>
4.1.	Introducción . . . . .	59
4.2.	Modelos de turbulencia de una ecuación . . . . .	61
4.3.	Modelado con Dinámica de Fluidos Computacional . . . . .	66
4.3.1.	Método de los Volúmenes Finitos . . . . .	66
<b>5.</b>	<b>Metodología</b>	<b>70</b>
5.1.	Planteamiento del problema . . . . .	70
5.1.1.	Modelo Físico de Interés . . . . .	71
5.1.2.	Condiciones de Frontera . . . . .	72
5.2.	Discretización del Dominio Geométrico . . . . .	74
<b>6.</b>	<b>Resultados</b>	<b>78</b>
6.1.	Precisión de los modelos de turbulencia . . . . .	79
6.2.	Resultados Wingtip Circular . . . . .	83
6.2.1.	Velocidad del flujo transversal . . . . .	83

---

---

6.2.2. Componente Axial de la Vorticidad . . . . .	85
6.2.3. Coeficiente de Presión Estática . . . . .	87
6.2.4. Velocidad Axial . . . . .	88
6.2.5. Propiedades de la Turbulencia . . . . .	89
6.3. Resultados Wingtip Rectangular . . . . .	95
6.3.1. Velocidad del Flujo Transversal . . . . .	95
6.3.2. Componente Axial de la Vorticidad . . . . .	96
6.3.3. Coeficiente de Presión Estática . . . . .	96
6.3.4. Velocidad Axial . . . . .	99
6.3.5. Propiedades de la Turbulencia . . . . .	99
<b>7. Conclusiones</b>	<b>104</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	104
7.2. Trabajo Futuro . . . . .	107

# CAPÍTULO

## 1

### RESUMEN

Como consecuencia del aumento del tránsito aéreo, tanto el ahorro de combustible de las aeronaves y la disminución de los riesgos de accidentes aéreos son necesidades que se deben atender de manera eficaz. El objetivo de este trabajo de tesis consiste en conocer de manera detallada el fenómeno del vórtice de salida producido por un ala recta de cuerda geométrica constante. Al atender este objetivo, promovemos un conocimiento más amplio sobre la formación y evolución de los vórtices de salida y su contribución con la eficiencia aerodinámica de las alas de longitud finita.

Para solucionar este problema, extensas investigaciones se han llevado a cabo para mejorar la comprensión básica de la dinámica, la estructura y la disipación del vórtice de salida en el extremo del ala. Hasta ahora no todos los detalles importantes son bien com-

prendidos. Para poder hacer una evaluación correcta es necesario realizar análisis cuantitativos del flujo de cantidad de movimiento alrededor del ala, tarea que resulta complicada debido a la complejidad del flujo y a la incertidumbre que es inherente al modelado de la turbulencia y la geometría del ala.

Una estrategia ampliamente usada para atender este problema consiste en resolver modelos matemáticos que evalúan los procesos de interacción dinámica de los flujos de cantidad de movimiento alrededor de un ala aerodinámica con perfil simétrico conocido, variando el diseño del extremo del ala y considerando al aire como un fluido viscoso e incompresible.

En este trabajo se caracterizan las cualidades aerodinámicas, en régimen subsónico, del ala recta con modificaciones en la geometría redondeada en el extremo del ala. La hipótesis que da pie a esta investigación es que la rapidez de disipación de los vórtices secundarios cambia significativamente con la redondez de la punta alar, lo que conduce a que las componentes de esfuerzos de Reynolds presenten simetría espacial en una etapa más temprana.

El análisis de las alas se realizó empleando como herramienta principal la Dinámica de Fluidos Computacional. En el estudio se crearon dos geometrías tridimensionales virtuales. Las alas se crearon utilizando el perfil aerodinámico NACA0012 original, y el mismo perfil con modificaciones de geometría de borde redondeado. Se generó y se verificó la discretización del dominio geométrico, empleando la estrategia de wall  $y^+$  y la calidad de oblicuidad de la malla. Se utilizó el modelo de turbulencia Shear Stress Transport (SST) y los resultados se validaron mediante la comparación con datos experimentales presentados en la literatura, obteniendo una comparación adecuada para flujos subsónicos.

Los resultados obtenidos a partir del modelado computacional se pueden emplear para desarrollar estrategias que modifiquen la rapidez de disipación de los vórtices de salida generando oportunidades para reducir el tamaño de la estela, reducir el arrastre inducido en el ala, el ahorro de combustible y la disminución de accidentes aéreos debidos a la

turbulencia de estela generada por las aeronaves.



## CAPÍTULO

### 2

## ANTECEDENTES

### **2.1. Introducción**

El transporte aéreo es hoy en día el modo de transporte más rápido y seguro. Actualmente, gracias al progreso tecnológico en los de materiales, sistemas de propulsión y aviónica nos transportamos en aeronaves más eficientes, seguras y con mejoras notables en el sistema de comunicaciones, en la navegación, la visualización, y las operaciones con limitaciones climáticas. A pesar de todos estos avances, la eficiencia aerodinámica, la estabilidad y la maniobrabilidad de las aeronaves modernas siguen dependiendo de las características aerodinámicas de las superficies sustentadoras.

El flujo perturbado detrás de una aeronave, resultado de la interacción entre las super-

ficies de la aeronave y el aire que la rodea, es considerado como una estela de vorticidad y difiere del aire del entorno en variaciones de velocidad, presión, temperatura, entre otros parámetros. Es importante diferenciar entre el concepto de *Estela de borde de salida* (Trailing Wake) y *Estela de vorticidad* (Vortex Wake). La estela de borde de salida se forma como resultado del flujo que pasa sobre un cuerpo en un medio viscoso y es causado por la fricción del cuerpo. Las estelas de borde de salida se representan como regiones con disminución en la velocidad media y un nivel de turbulencia elevado. En cambio, la estela de vorticidad se forma a partir del flujo alrededor de un cuerpo en un medio viscoso debido a la generación de sustentación y, correspondientemente, la presencia de resistencia inducida. La estela está acompañada por la formación de un par de vórtices longitudinales en contra-rotación a cierta distancia detrás del cuerpo.

La estela de vorticidad detrás de una aeronave es un flujo que se mueve sin límites a la velocidad media del flujo no perturbado. Puede alcanzar una longitud alrededor de 10 - 12 km [1], y depende en gran medida de las condiciones atmosféricas, el diseño aerodinámico de la aeronave, la velocidad de vuelo y la altitud. La mayor contribución a la forma de la estela de vorticidad y su comportamiento son debidas a la formación y al desprendimiento de los vórtices de salida desarrollados en los extremos del ala, los estabilizadores, los dispositivos de control, y el fuselaje.

La turbulencia presente en la estela de vorticidad se intensifica a medida que se incrementa la generación de los vórtices de salida. Adicionalmente, es importante considerar que esos flujos turbulentos también producen un decaimiento en la fuerza de sustentación de las aeronaves que se encuentran interactuando con ella.

En la comunidad de la aviación civil y la aeronáutica, los vórtices desarrollados en los extremos de las alas de las aeronaves comerciales representan un riesgo significativo para otras aeronaves durante el vuelo, situación común durante el aterrizaje y el despegue. Debido a los riesgos, la Administración Federal de Aviación (FAA) y la Organización de Aviación Civil Internacional (OACI) exigen que las aeronaves que realizan vuelos aten-

diendo las reglas de vuelo por instrumentos (IFR, Instrumental Flight Rules), se mantengan separadas por distancias mínimas que van entre 3-6 millas náuticas, en función de los tamaños de las aeronaves [2]. Por otra parte, en los aviones que realizan vuelos siguiendo las Reglas de Vuelo Visual (VFR), la distancia de separación se establece a discreción del piloto. Con el reciente desarrollo del Airbus A380, la OACI ha recomendado aún mayores distancias de separación para aeronaves que se viajan detrás de un A380 durante el aterrizaje y el despegue [3].

La generación y la propagación de vórtices producidos por las alas de las aeronaves comerciales causan gran impacto en el sistema de transporte aéreo, asunto que se ha agravado en las últimas décadas debido al aumento en el tráfico aéreo [33]. Durante la aproximación y despegue entre aeronaves, la formación y el desarrollo de los vórtices demoran el tráfico aéreo en todos los aeropuertos. El estudio detallado de la estructura y el desarrollo de vórtices es fundamentalmente importante en los esfuerzos que se hacen por mejorar el diseño de aeronaves en un futuro cercano.

Muchos estudios se han enfocado en la modificación y control de la intensidad de los vórtices de salida a través del uso de dispositivos en la punta del ala (wingtip devices), mismos que se consideran métodos pasivos (estáticos) basados en cambios en la configuración del ala. Éstos incluyen a los generadores de vórtices, winglets, wingtip montados sobre hélices, splines y spoilers. Existen además métodos activos (dinámicos) basados en el uso de dispositivos, controles continuos o periódicos, tales como *Blowings*, *active Gurney flaps*, *boundary layer separation control*, *active surface mount actuators*. No obstante que se han realizado muchos estudios sobre los vórtices del extremo del ala, los estudios sobre la física del flujo no son tan numerosos. La complejidad del estudio tridimensional del flujo en la región cercana a la punta no se describe adecuadamente, especialmente en cuanto a la inestabilidad del vórtice y el mecanismo de transporte de vorticidad de las capas viscosas, cerca de la superficie en el concentrado del vórtice de salida.

Los experimentos para medir el flujo de un vórtice de salida puede ser un método muy

costoso, difícil y consume mucho tiempo. A menudo se llevan a cabo en túneles de viento a números de Reynolds inferiores a las condiciones reales en modelos simplificados. Las dificultades de medición también se incrementan debido a los flujos errantes, fenómeno que se produce en la línea central del núcleo del vórtice, corriente abajo. Actualmente, la experimentación es el método más exacto para el estudio de los vórtices de salida.

Por otro lado, la dinámica de fluidos computacional (CFD) ahora es capaz de producir datos de alta resolución para un costo monetario posiblemente menor que la ejecución de un túnel de viento. El método actual de CFD es capaz de producir razonablemente resultados para flujos a números de Reynolds de escala real mediante la solución de las ecuaciones promediadas de Reynolds Navier-Stokes (RANS). Los métodos numéricos se convierten entonces en las herramientas que han demostrado ser eficientes para la solución de los modelos matemáticos. Adicionalmente, las simulaciones computacionales son más económicas que los estudios experimentales, y generalmente más rápidas. Lo anterior no implica que la simulación computacional reemplace a los estudios experimentales sino que es una metodología que puede favorecer al desarrollo de soluciones más satisfactorias, que posteriormente deberán ser probadas experimentalmente.

## **2.2. Estado del Arte**

En los últimos años, extensas investigaciones se han llevado a cabo para mejorar la comprensión básica del comportamiento transitorio de la dinámica del vórtice de salida en el extremo del ala, analizando la estructura y su disipación mediante métodos analíticos, numéricos y experimentales.

**Green** [4] explica de tres maneras distintas la aparición de los vórtices de salida. La primera descripción considera la diferencia de presión entre las superficies inferior y superior del ala, misma que genera una succión que acelera al fluido alrededor de la punta. Este movimiento, combinado con la componente de velocidad en la dirección de la corriente

libre, produce una estructura de vórtice de salida. Una segunda y más esquemática explicación implica a la ley de vórtice de Helmholtz, donde se presentan los vórtices de salida como la conexión entre el vórtice enlazado "Bound vortex" (circulación neta alrededor del ala, ley de Kutta-Jukowski) y el vórtice de punta libre "trailing vortex" (la correspondencia de la circulación del ala cuando el ala comienza a moverse, Teorema del Kelvin). Una tercera forma de explicar los vórtices de salida es en términos de la capa de cizalladura que existe cerca de la punta. El flujo no perturbado y el flujo sobre las superficies del ala no son paralelos, lo que implica vorticidad cerca de las puntas del ala. Este mecanismo permite la aparición de dos vórtices de signo opuesto detrás de cada extremo del ala sin producir sustentación. Sin embargo, lo que se observa es que el vórtice de salida es más complejo que estos mecanismos y el flujo en el extremo del ala consiste en el desarrollo y la interacción de múltiples estructuras de torbellinos, inestabilidades en la capa de cizalladura, separaciones tridimensionales y reacoplamiento. Como consecuencia, en la estela se observa el enrollamiento del flujo, inestabilidades del vórtice, pérdida de intensidad y la difusión, interacciones y la unificación de pequeños vórtices. Adicionalmente, la formación y el desarrollo de los vórtices se ven fuertemente afectados por varios factores como la geometría de las alas, la geometría de la punta, la distribución de carga del ala, la circulación del vórtice y la naturaleza de la capa límite en el ala.

### **2.2.1. Estudios Experimentales**

Numerosos estudios experimentales se han llevado a cabo para comprender el desarrollo del vórtice de salida en un campo lejano (far field). Sin embargo, las mediciones en túneles de viento se vuelven complicadas debido a la existencia de inestabilidades de baja frecuencia que pueden convertirse en grandes fuentes de error de medición, especialmente en regiones de grandes gradientes de velocidad. Recientemente ha habido una mayor aparición de estudios centrados en la dinámica y en el enrollamiento de los vórtices de salida

en el campo cercano (near field). Ahora se sabe que en el campo cercano los parámetros de flujo en el núcleo del vórtice son en gran medida afectados por el ángulo de ataque, la distancia corriente abajo desde el borde de salida del ala, la forma de la punta, la forma aerodinámica del ala, el número de Reynolds, la rugosidad de la superficie, la resolución de medición, y la técnica experimental utilizada.

En la tabla 2.1 se da una pequeña descripción de los trabajos experimentales relevantes al estudio en un campo cercano y al enrollamiento del vórtice de salida. En la literatura se ha dividido en sub-categorías de estudios sin medidas de la turbulencia y los estudios con medidas de la turbulencia.

Referencia	Perfil	AR	Re ( $\times 10^5$ )	Punta	x/c	$\alpha$
Chigier and Corsilia [5]	0015	5.33	9.53	a	0.25-5	12
Corsiglia et al. [6]	0015	5.33	3	a	27-165	8
Orloff [7]	0015	5.33	7	a	3	8-12
Thompson [8]	0012	3.91	0.68	ab	31-36	0-12
McAlister and Takahashi [9]	0015	6.6	15, 25	ab	1.1-5	4, 8, 12
Devenport et al. [10]	0012	8.66	5.3	a	5-30	5
				a	10	
chow et al. [22]	0012	1.5	46	b	0-1.68	10
Ramaprian and Zheng [28]	0015	4	1.8	a	4.33	5
				a	1.33-4.33	10
Anderson and Lawton [32]	0015	1.6	7.5-12.5	a	2-3	4-10
				b	2-3	4-10
Lee et al. [15]	0015	5	2.01	a	0.5-3	10
				a	2.5	2-18
				a	10	
T. Lee and J. Pereira [16]	0012	3.6	3	a	5	5
				b	5	5
				a	10	5
				b	10	5

**Tabla 2.1:** Trabajos experimentales relacionados al estudio del vórtice de salida.

a: Ala con punta rectangular. b: Ala con punta circular. Referencia: T. Lee and J. Pereira [16]

El enrollamiento del vórtice de salida en un campo cercano al borde de salida de un ala recta con perfil simétrico NACA0012 fue estudiado por **Jim S. Chow et al.** [22], llevando a cabo un estudio experimental en un túnel de viento a un número de Reynolds ( $Re = 4.6 \times 10^6$ ), manteniendo un ángulo de ataque constante de  $\alpha = 10$ . Mediante la técnica de anemometría de hilo caliente y con siete sondas de presión cuantificaron la velocidad del aire y la presión estática. Comprobaron que el campo de la velocidad axial se intensifica a más de  $1.77U_\infty$  de la velocidad de corriente libre en el núcleo del vórtice. En el caso del nivel de turbulencia producido se incrementa a lo más 24 % rms, pero decae rápidamente en relación a la distancia en dirección al flujo, a causa de la rotación del núcleo el cuál es considerado como un cuerpo sólido en rotación.

Estudios preliminares han llegado a la conclusión de que el vórtice es sensible a la introducción de sondas de medición [10, 11, 12]. Una de las principales dificultades para la medición del campo de velocidad de un vórtice de salida es debido los flujos errantes (*meandering or wandering*), los cuales son producidos por la interacción del flujo y sondas de medición. Los flujos errantes se caracterizan por ser movimientos aleatorios de baja frecuencia en un plano transversal a la dirección axial del vórtice de salida, como resultado de la turbulencia de la corriente libre, inestabilidad del vórtice de salida, perturbaciones debido al desarrollo de la capa cizallante e inestabilidades originadas en el modelo [21]. **Devenport et al.** [10] realizaron una investigación experimental sobre los flujos errantes mediante la técnica de velocimetría de hilo caliente. Estudiaron la estructura de un vórtice de salida desarrollado por un ala recta con perfil aerodinámico NACA0012 a un  $Re = 5.35 \times 10^5$ . El estudio se llevó a cabo a una longitud entre 5-30 veces la cuerda aerodinámica del perfil corriente abajo con respecto al borde de salida. Los resultados mostraron un déficit de aproximadamente el 84 % de la velocidad de corriente libre. Se realizó un análisis detallado sobre los efectos de los flujos errantes en el núcleo del vórtice y fuera del núcleo, asimismo, desarrollaron una teoría para corregir los perfiles de velocidad media y proporcionar estimaciones cuantitativas sobre su amplitud y las contribu-



ciones a los esfuerzos de Reynolds. Observaron que fuera de la región del núcleo, el flujo es dominado por la estela turbulenta producida por el ala, la cual se enrolla en forma de espiral alrededor del núcleo. Concluyeron que las amplitudes de los flujos errantes son pequeñas (típicamente menos del 1 % de la cuerda aerodinámica, 30 % del radio del núcleo), la amplitud se incrementa corriente abajo y decrece al variar el ángulo de ataque.

**J Katz at al.** [11] demostraron que las dimensiones físicas del vórtice de salida no se ven afectadas significativamente por la rugosidad de la superficie del ala, mientras que un aumento en la rugosidad de la superficie reduce la intensidad del vórtice. Mencionaron que dependiendo de la forma de la punta, el enrollamiento del vórtice de salida puede incluir la fusión de múltiples pequeños vórtices que se forman a partir de la separación de las capas de esfuerzos locales.

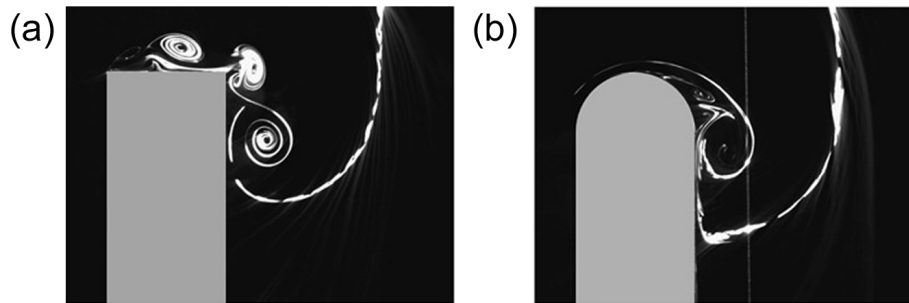
**S.C.C. Bailey, S. Tavoularis** [12] concluyeron que la turbulencia en el núcleo se intensifica a medida que se incrementa la turbulencia de corriente libre. La trayectoria del vórtice no es afectado por la turbulencia de la corriente libre, pero la estela que se enrolla alrededor del vórtice presenta una curvatura que decrece al incrementar la intensidad de esta turbulencia.

**A. Shekarriz at al.** [13] estudiaron el comportamiento de los vórtices de salida en un campo cercano para un ala con baja relación de aspecto. Midieron la distribución de la velocidad axial, realizando diferentes repeticiones en los experimentos variando el número de Reynolds y el ángulo de ataque. Los resultados indican que el enrollamiento es casi completo en el borde de salida y que menos del 66 % de la circulación de la raíz es arrastrado en el vórtice.

**Michea Giuni y Richard B. Green** [14] llevaron acabo un estudio de visualización de flujo en un ala recta con punta en forma rectangular y circular, utilizando un perfil simétrico NACA0012. Concluyeron que la energía de enrollamiento del flujo y el desarrollo de un sistema de vórtices primarios en un campo cercano al borde de salida es afectado por la presencia de intensos vórtices secundarios. El ala con punta rectangular presenta

dos bordes afilados, los cuales producen una estructura de vórtice de salida con vórtices secundarios altamente inestables (mostrado en la figura 2.1a). Posteriormente, el vórtice primario interacciona tempranamente con el vórtice secundario causando flujos errantes en la estructura del vórtice de salida, los cuales rápidamente son reducidos debido a la disipación de los vórtices secundarios. En el otro caso, el ala con diseño de punta circular, produce pequeños vórtices secundarios de menor intensidad, consiguiendo condiciones de flujo de simetría axial en una etapa temprana (mostrado en la figura 2.1b). Sin embargo, la principal fuente de los flujos errantes para esta geometría está relacionada a la hoja de vorticidad que se enrolla alrededor del vórtice de salida conforme se desplaza corriente abajo, por lo cual, las fluctuaciones se intensifican en función de la distancia axial desde el borde de salida. Afirman que la producción de turbulencia en el proceso de formación está directamente relacionada con los gradientes radiales del flujo axial. La dirección del flujo axial y su intensidad desempeñan un papel importante en la evolución temprana del vórtice de salida. **Chow et al.** [24] presentó un estudio sobre los vórtices secundarios y terciarios, los cuales se unifican en el vórtice primario dentro de una longitud no mayor a un cuerda del perfil aerodinámico desde el borde de salida del ala. También comprobaron que la forma del vórtice de salida presenta simetría axial con una velocidad axial mayor a la velocidad de la corriente libre (jetlike). **Freymuth et al.** [25] declaró que la visualización del flujo es el mejor enfoque para obtener pistas sobre las estructuras de vórtices complejos y muchos estudios de este fenómeno comienzan con visualizaciones del flujo [11, 24, 26].

**Bailey et al.** [12] encontraron que el flujo sobre la punta de un ala está compuesto por pequeños vórtices, los cuales rotan simultáneamente con el vórtice de salida. Mediante la técnica de visualización con humo realizados por **Katz y Galdo** [11] se mostró una estructura compleja con vórtices y su interacción. Las mediciones realizadas por **Birch et al.** [27], mediante la técnica de Velocimetría de Imágenes de Partículas en un ala con punta rectangular, confirmaron la estructura de múltiples vórtices en el inicio del enrollamien-

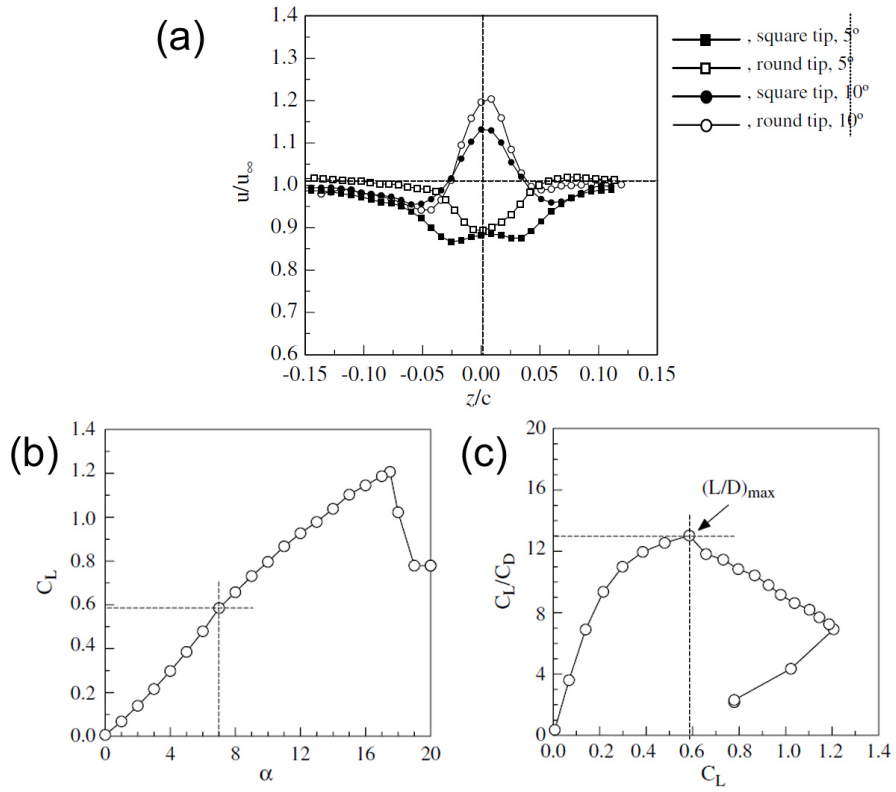


**Figura 2.1:** Evolución del vórtice de salida en el plano  $z/c = 0.6$ , para un  $Re = 3000$  y  $\alpha = 12$ . (a) punta rectangular. (b) punta circular. Referencia: **Michea Giuni y Richard B. Green** [14]

to del vórtice de salida y mostraron déficit de velocidad axial, y un exceso en el centro del vórtice a una distancia de 1.5 veces la cuerda del perfil aerodinámico desde el borde de salida. **Karakus et al.** [30] concluyeron que la región de la punta está sometida por la fuerte interacción entre múltiples vórtices secundarios y el vórtice primario. **Zuhal y Gharib** [31] también descubrieron esta interacción en el vórtice a una distancia no mayor a tres veces la cuerda del perfil aerodinámico desde el borde de salida; encontraron una correlación entre las altas fluctuaciones localizadas en el vórtice primario y la presencia de fuertes vórtices secundarios.

La velocidad axial del flujo en la región interna del vórtice de salida puede presentar una distribución chorro (*jetlike*) ó estela (*wakelike*). **T. Lee et al.** [16] comprobaron experimentalmente que la forma de la punta de un ala puede influir en gran medida en la intensidad del flujo, pero no es la causa de la naturaleza de un *jetlike* o *wakelike*. El ángulo de ataque y la interacción entre el vórtice de salida y la estela determinaran la naturaleza de la distribución del flujo axial en un campo cercano.

Para ángulos de ataque pequeños, el flujo es arrasado por los esfuerzos cortantes y la estela del ala, presentando una distribución de forma *wakelike* a medida que avanza aguas abajo con respecto al borde de salida del ala (mostrado en la figura 2.2(a)). En cambio, para ángulos de ataque elevados, el fluido es rodeado por los esfuerzos cortantes, a su vez,



**Figura 2.2:** Características aerodinámicas del ala con punta redondeada y rectangular. (a) velocidad axial normalizada con la velocidad de la corriente libre  $u/u_\infty$  vs dirección transversal al flujo  $z/c$ . (b) Coeficiente de sustentación  $C_L$  vs ángulo de ataque  $\alpha$ , para ala con punta rectangular. (c) Relación de coeficientes de sustentación y arrastre  $C_L/C_D$  vs coeficiente de sustentación  $C_L$  para ala con punta rectangular. Referencia: T. Lee et al. [16]

protegidos de los efectos destructivos de la estela del ala y permaneciendo como un *jetlike*. El ángulo de conmutación en el que el flujo axial cambia de *wakelike* a un *jetlike* aparece alrededor de 7 grados como ángulo de ataque, el cual también coincidió con el ángulo en el que la relación del coeficiente de sustentación y arrastre es máximo, Figura 2.2(b,c).

Una opción viable para la reducción de los vórtices de salida es la aplicación de métodos de control activo (eg. flaps, alerones, timones o diversas superficies de control). **Mojtaba Ahmadi-Baloutaki** et. al [49] llevaron a cabo un estudio experimental sobre los efectos del flujo turbulento inducido en la corriente libre. Los estudios fueron realizados utilizando un perfil simétrico NACA 0015 a distintos ángulos de ataque entre 0 y 25, y un número de Reynolds de  $1.6 \times 10^5$ , así como una malla con la función generadora de turbulencia a la entrada del túnel de viento (4.6 % rms). Concluyeron que un aumento en la intensidad de la turbulencia inducida incrementa los coeficientes aerodinámicos fundamentales (sustentación y arrastre), retrasa el desplome estático, y además incrementa la velocidad tangencial y la circulación a medida que el vórtice se aleja del perfil.

Otro enfoque a estos métodos activos para controlar los efectos de los vórtices de salida es mediante el uso de orificios para succión y expulsión de aire (wing tip blowing). **P. Margaris** [50] desarrolló un estudio paramétrico extenso sobre la topología de los vórtices de salida bajo los efectos de la expulsión de aire continuo desde la punta del ala. Estas alteraciones fueron medidas bajo diferentes circunstancias de expulsión, como las posiciones de los orificios (sobre la superficie de la punta del ala, en una zona cercana al borde de ataque y otra en el borde salida), las superficies de donde se realizaba la expulsión (Intradós, extradós y punta) y la geometría de la punta (cuadrada y redonda). Como resultado de este estudio, obtuvieron la manera más efectiva de disipación de los vórtices de salida mediante el posicionamiento de la fuente de expulsión en la región cercana al intradós y al borde de ataque, mientras que al posicionar la misma cerca del extradós y del borde de ataque generó vórtices coherentes sencillos o múltiples. Cabe destacar que la geometría de la punta influye en gran medida sobre la formación de los vórtices de salida y la disipación

de los mismos para las configuraciones de expulsión antes mencionadas, ya que para el caso de la punta cuadrada se evidenció el efecto de los vórtices de rotación contraria generados por la expulsión de aire, los cuales se fusionaban con el vórtice primario en una etapa temprana de la formación de ambos, causando una difusión de los vórtices a la salida del ala, así como una reducción de su intensidad de turbulencia. Por otro lado, para el caso de la punta redonda se presentó un efecto contrario, ya que el fluido mostró un efecto Coanda (adhiriéndose a la punta), lo cual conllevó a una pobre interacción del vórtice primario con el vórtice de rotación contraria dando así como resultado un vórtice más desarrollado y de mayor intensidad que para el caso de la punta cuadrada.

### 2.2.2. Estudios Numéricos

El cálculo numérico del flujo alrededor de la punta de un ala aerodinámica se está convirtiendo en una herramienta muy útil para mejorar la comprensión del fenómeno físico de los vórtices de salida. Diferentes investigadores [17, 18, 20] realizaron un estudio numérico detallado sobre la relación de la punta de un ala y el vórtice de salida. Estos trabajos fueron realizados en conjunto y comparados con los resultados experimentales publicados por **Chow** [22, 23].

Los estudios de **Matthew J. et al.** [17] examinaron el desempeño de diversos modelos de turbulencia utilizando CFD basados en RANS para simular la formación del vórtice de salida en un campo cercano, utilizando el código numérico NPARC WIND 5.0 y WIND-US 1.0. Los modelos de turbulencia explorados son el modelo estándar Spalart-Allmaras (SA), el modelo Spalart-Allmaras con la corrección de la rotación del sistema y la curvatura de la línea de corriente (SA-RC), el modelo SST (The Menter Shear Stress Transport Model) y el modelo de esfuerzos algebraico explícito Rumsey - Gatski. Las soluciones obtenidas usando un esquema numérico de quinto orden muestran que el modelo de turbulencia AS-RC predice con mayor precisión el comportamiento del flujo sobre el ala.

Sin embargo, ninguno de los modelos de turbulencia explorados captan con precisión las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds.

Para el modelo Spalart-Allmaras, el término de producción es originalmente  $P = C\tilde{\nu}s$ , donde  $C$  es una constante,  $s$  es un escalar medible del tensor medio de deformación, y  $\tilde{\nu}$  es la viscosidad turbulenta; la corrección de rotación cambia el término de producción por  $P = C\tilde{\nu} [|\omega| + 2\min(0, |S| - |\omega|)]$ , donde  $|\omega|$  es la magnitud de la vorticidad y  $|S|$  es la magnitud del rango de deformación.

**Dacles - Mariani** [18] identificaron tanto el error numérico debido a la discretización del dominio como también al error asociado con el uso de los modelos de turbulencia basados en la viscosidad de *eddy*. También encontraron que el modelo de Spalart-Allmaras dio resultados similares a los del modelo Baldwin-Barth pero con más detalle. Además, el uso de una corrección de rotación en el término de producción del modelo de turbulencia mejora en gran medida las predicciones. Utilizaron datos experimentales para establecer las condiciones frontera de la entrada y salida del dominio geométrico; trataron con condiciones de Dirichlet y Neumann, mostrando resultados más precisos con condiciones de Neumann. En el mejor de los casos, la presión estática en el núcleo del vórtice de salida está sobrepronosticada en un 11 %, la magnitud de la velocidad en el núcleo del vórtice de salida se sobrepronosticó en un 3 %, y el tamaño del núcleo del vórtice de salida se prevé dentro del 2 %. Una de sus principales conclusiones es que, al menos se debe utilizar un esquema numérico de quinto orden de manera que en la región de la punta del ala y en el núcleo del vórtice no resulte demasiado difuso. **Dacles-Mariani et al.** [19] declararon que es poco probable que un modelo  $k - \varepsilon$  ó modelo Reynold-stress tengan alguna esperanza de predecir el flujo de hasta 0.5 % de precisión.

**Kim y Rhee** [20] utilizaron el código comercial CFD FLUENT para realizar los cálculos RANS del vórtice de salida. Emplearon un enfoque de volúmenes finitos de celdas centrales utilizando el esquema QUICK. Dos aspectos de su investigación son interesantes. En primer lugar, utilizaron una función de malla adaptativa no estructurada. Esta malla se

adapta automáticamente para proporcionar una alta resolución en la región del centro del vórtice de salida mediante la identificación de regiones en las que la segunda invariante del tensor de la tasa de deformación cae dentro de un cierto rango. En segundo lugar, utilizaron el modelo de turbulencia Reynolds-stress de FLUENT. Esto fue utilizado además de los modelos: Spalart-Allmaras con corrección de rotación [19], el modelo Menter SST, y el modelo  $k - \varepsilon$ . Con la función de malla adaptativa y el modelo de transporte Reynolds-Stress, **Kim y Rhee** [20] obtuvieron buenos resultados con el experimento en la región cercana al borde de salida del ala, especialmente en términos de la caída de presión estática en el núcleo del vórtice de salida. Sin embargo, corriente abajo desde borde de salida del ala, el vórtice computarizado se convierte en demasiado difuso. Curiosamente, encontraron que el modelo Spalart-Allmaras con corrección de rotación también proporciona buenos resultados si las constantes de corrección se cambian por las constantes publicadas por Dacles-Mariani[19].

**T.J. Craft** et. al. [51] enfocó un estudio numérico computacional para comprobar los resultados experimentales realizados por **Chow** [22, 23] mediante el uso de diversos modelos de turbulencia, siendo estos los modelos de viscosidad Eddy (linear y no linear) y un modelo de transporte de esfuerzos (o de segundo momento) que satisface el *Límite de dos componentes*. Los resultados de las simulaciones realizadas para este experimento concuerdan con lo expresado por otros autores, demostrando cómo ambos modelos de viscosidad de Eddy presentan un decaimiento muy precipitado en el núcleo del vórtice, sin embargo, el modelo de transporte de esfuerzo "límite de dos componentes" presenta mayores concordancias con los resultados expuestos por **Chow** [22, 23], de igual manera Craft concluye que es necesario profundizar más en la investigación de este modelo para corregir el pronunciado decaimiento en el campo de esfuerzos corriente abajo.



## **2.3. Hipótesis**

La hipótesis que da pie a esta investigación es que la rapidez de disipación de los vórtices secundarios cambia significativamente con la curvatura en el espesor de la punta alar, lo que conduce a que las componentes de esfuerzos turbulentos presenten distribución compleja, lo que afecta la disipación del vórtice en una etapa más temprana.

## **2.4. Objetivos**

### **2.4.1. Objetivo General**

El objetivo general de la presente tesis es analizar el efecto de la geometría redondeada de la salida de una ala rectangular sobre la aerodinámica, la estructura y la disipación de los vórtices de salida secundarios, mediante la Dinámica de Fluidos Computacional.

### **2.4.2. Objetivos Específicos**

1. Revisar el estado del arte referente al estudio aerodinámico del vórtice de salida.
2. Revisar los modelos de turbulencia apropiados a la naturaleza de la aerodinámica de flujos externos alrededor de superficies sustentadoras y alas de longitud finita.
3. Seleccionar el modelo de turbulencia adecuado para la caracterización de la aerodinámica de flujos en alas finitas.
4. Validar los modelos numéricos mediante la comparación de resultados computacionales con datos experimentales.
5. Diseñar la geometría del ala.

6. Evaluar de manera cuantitativa las componentes de la velocidad, vorticidad, presión estática y las propiedades turbulentas referentes al vórtice de salida en un campo cercano.

## CAPÍTULO

### 3

## MARCO TEÓRICO

### **3.1. Ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos**

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos están basadas en las siguientes leyes de conservación:

- Conservación de masa
- Conservación de la cantidad de movimiento (Momentum)
- Conservación de la energía

La ecuación que resulta de aplicar la Ley de conservación de masa a un fluido se conoce como Ecuación de Continuidad. La conservación de la cantidad de movimiento (o

momentum) no es otra cosa sino la Segunda Ley de Newton. Cuando esta ley se aplica a un fluido, se genera una ecuación vectorial conocida como Conservación de cantidad de movimiento. La conservación de la energía es idéntica a la Primera Ley de la Termodinámica, y la ecuación resultante para fluidos se conoce como Ecuación de la Energía. Adicionalmente a estas ecuaciones basadas en leyes universales, es necesario establecer relaciones entre las propiedades del fluido de tal forma que sea posible cerrar el sistema de ecuaciones. Un ejemplo de estas relaciones son las ecuaciones de estado, mismas que relacionan a las variables termodinámicas denominadas *presión*  $p$ , *densidad*  $\rho$ , y *temperatura*  $T$ .

### 3.1.1. Ecuación de la Conservación de Masa

La ley de la conservación de la masa aplicada a un fluido que pasa a través de un volumen de control de tamaño infinitesimal conduce a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\vec{V}$  es el vector de la velocidad del fluido. El primer término en esta ecuación representa la razón de cambio de la densidad en el volumen de control y el segundo término representa la razón neta de flujo de masa que atraviesa la superficie de control (superficie que rodea al volumen de control) por unidad de volumen. Es conveniente utilizar la derivada sustancial definida como:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\cdot) \quad (3.2)$$

de tal forma que la ecuación de continuidad se puede escribir como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad (3.3)$$

En coordenadas cartesianas, donde  $u, v, w$  representan las componentes de la velocidad en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente, la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (3.4)$$

Para flujo de aire en estado permanente con velocidad menor a 100 m/s, el número de Mach resulta  $Ma < 0.3$  y en tal caso es posible suponer que la densidad es constante por lo que matemáticamente:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.5)$$

lo que se conoce como flujo incompresible, y en tal caso la ecuación de conservación de masa es

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.6)$$

y en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

### 3.1.2. Ecuación de Conservación de la Cantidad de Movimiento

La segunda ley aplicada a un elemento de fluido pasando a través de un volumen de control fijo de tamaño infinitesimal conduce a la siguiente ecuación vectorial:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij} \quad (3.8)$$

El primer término del lado derecho corresponde a las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen. Las fuerzas de cuerpo actúan a distancia y se aplican en toda la masa del fluido. La fuerza de cuerpo más común es la fuerza gravitacional. En este último caso la fuerza por unidad de masa  $\vec{f}$  iguala a la aceleración de la gravedad  $\vec{g}$ , es decir:

$$\rho \vec{f} = \rho \vec{g} \quad (3.9)$$

adicionalmente, el segundo término del lado derecho representa las fuerzas de superficie por unidad de volumen. Estas fuerzas se aplican como esfuerzos externos sobre el elemento de fluido. Los esfuerzos constan de esfuerzos normales y esfuerzos cortantes y se encuentran representados por las componentes del tensor de esfuerzo  $\Pi_{ij}$ . El tensor de esfuerzo se separa comúnmente de la siguiente forma:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3.10)$$

donde  $\tau_{ij}$  representa el tensor de esfuerzo viscoso y está dado por

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

Entonces las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento) en forma subindicial son:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.12)$$

Para un sistema cartesiano de coordenadas las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser acomodadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\
 \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\
 \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser reescritas en forma de ley conservativa como:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho uw - \tau_{xz}) = \rho f_x \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho vw - \tau_{yz}) = \rho f_y \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uw - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vw - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2 + p - \tau_{zz}) = \rho f_z \tag{3.16}$$

donde las componentes del tensor de esfuerzos viscosos  $\tau_{ij}$  están dados por:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.17)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.18)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.19)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx} \quad (3.20)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{zx} \quad (3.21)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \quad (3.22)$$

En caso de que se trate de flujo incompresible con coeficiente de viscosidad constante, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento se reduce a un modelo menos complicado:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.23)$$

Es importante recalcar que la ecuación (3.23) corresponde al caso de viscosidad constante, por lo que podría resultar en un modelo inadecuado para flujos no isotérmicos de líquidos cuya viscosidad sea altamente dependiente de la temperatura. Por otra parte, la viscosidad de los gases es moderadamente dependiente de la temperatura, por lo que este modelo resultará en una buena aproximación para flujo incompresible de gases.

### 3.1.3. Ecuación de la Energía

La primera ley de la termodinámica aplicada a un fluido que atraviesa un volumen de control fijo de tamaño infinitesimal conduce a la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot E_t \vec{V} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + \nabla \cdot (\vec{\Pi}_{ij} \cdot \vec{V}) \quad (3.24)$$



donde  $E_t$  es la energía total por unidad de volumen dada como:

$$E_t = \rho \left( e + \frac{V^2}{2} + \text{energía potencial} + \dots \right) \quad (3.25)$$

y  $e$  es la energía interna por unidad de masa. El primer término de la izquierda representa la razón de cambio de  $E_t$  dentro del volumen de control, mientras el segundo término representa la pérdida neta de energía por convección a través de la superficie de control. El primer término del lado derecho es la razón de producción de calor por agentes externos y el segundo término  $(\nabla \cdot \vec{q})$  es la razón de calor perdido por conducción a través de la superficie de control. Se puede suponer que se cumple la ley de Fourier de tal forma que:

$$\vec{q} = -k\nabla T \quad (3.26)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica y  $T$  la temperatura. El tercer término del lado derecho de la ecuación (3.24) corresponde al trabajo hecho sobre el volumen de control por parte de las fuerzas de cuerpo, mientras el cuarto término cuantifica el trabajo hecho sobre el sistema por parte de las fuerzas de superficie. Queda claro que la ecuación de la energía es consistente con la primera ley de la termodinámica, i.e. el incremento de energía en el sistema es igual al calor adicionado al sistema sumado al trabajo hecho sobre el sistema.

Es práctica común reescribir la ecuación de la energía de tal forma que se aprecia la existencia de un término conocido como *función de disipación*  $\Phi$ , misma que físicamente representa la razón a la cual parte de la energía mecánica se emplea en el proceso de deformación del fluido y se convierte en calor debido a la viscosidad. La ecuación de la energía en términos de la energía interna  $e$  queda de la siguiente forma:

$$\rho \frac{De}{Dt} + p(\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{q} + \Phi \quad (3.27)$$

Utilizando la definición de entalpía

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (3.28)$$

y la ecuación de continuidad, la ecuación de la energía queda de la siguiente manera:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{q} + \Phi \quad (3.29)$$

donde para un sistema cartesiano la función de disipación es:

$$\begin{aligned} \Phi = \mu & \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & \mu \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

En caso de que el flujo sea incompresible y considerando que el coeficiente  $k$  sea constante, la ecuación de la energía se reduce a:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + k \nabla^2 T + \Phi \quad (3.31)$$

### 3.2. Ecuaciones promediadas para flujos turbulentos

El principal impulso en la investigación actual en la dinámica de fluidos computacional y la transferencia de calor es mediante el uso de las ecuaciones promediadas de Navier

Stokes. Estas ecuaciones también son conocidas como Ecuaciones de Reynolds de movimiento o ecuaciones de Reynolds Navier-Stokes promediadas, RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*). Promediando en el tiempo las ecuaciones de movimiento dan lugar a la aparición de nuevos términos, los cuales pueden ser interpretados como *gradientes aparentes* de esfuerzos y flujos de calor asociados con el movimiento turbulento. Estas nuevas cantidades deben ser relacionadas con las variables del flujo promedio mediante modelos de turbulencia. Estos procesos introducen suposiciones y aproximaciones adicionales. Entonces, esta manera de tratar a los flujos turbulentos mediante la solución de las ecuaciones de Reynolds de movimiento no provienen de los principios fundamentales y algunas suposiciones adicionales deben ser incluidas para *cerrar* el sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones de Reynolds se obtienen descomponiendo cada una de las variables dependientes en las ecuaciones de conservación en dos partes: una parte promedio temporal (obtenida en un intervalo de tiempo apropiado) y una parte fluctuante, y posteriormente se promedian en el tiempo las ecuaciones completas. Existen dos tipos de promedios, el promedio clásico de Reynolds y el promedio ponderado con la masa (*mass-weighted averaging*) sugerida por Favre [34]. Ambas formulaciones resultan ser idénticas en caso de que las fluctuaciones de la densidad resulten despreciables.

### 3.2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes Promediadas de Reynolds

En el procedimiento de promedio convencional, siguiendo la estrategia de Reynolds, se define una cantidad promedio temporal  $\bar{f}$  como:

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f dt \quad (3.32)$$

Se requiere que  $\Delta t$  sea grande comparada con el periodo de las fluctuaciones aleatorias asociadas con la turbulencia, pero al mismo tiempo debe ser pequeña respecto a la constante de tiempo para cualquier variación lenta en el flujo asociada con flujos transitorios

ordinarios. La  $\Delta t$  es algunas veces indicada para aproximarse a infinito como límite pero esto se debe interpretar en relación al periodo de fluctuación característico de la turbulencia. Para mediciones prácticas, las variables del flujo fluctuante aleatorio se remplazan por valores promedio temporal sumados a fluctuaciones respecto al promedio. Para un sistema cartesiano rectangular, escribimos:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' & v &= \bar{v} + v' & w &= \bar{w} + w' & \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ p &= \bar{p} + p' & h &= \bar{h} + h' & T &= \bar{T} + T' & H &= \bar{H} + H' \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde la entalpía total  $H$  se define como  $H = h + u_i u_i / 2$ . Las fluctuaciones en otras propiedades del fluido como la viscosidad, la conductividad térmica, y el calor específico son usualmente pequeñas y serán despreciadas en este caso. Por definición, el promedio temporal de la fluctuación de una propiedad es cero:

$$\overline{f'} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f' dt \equiv 0 \quad (3.34)$$

Debería ser claro a partir de esta definición que para variables del flujo  $f$  y  $g$ , se cumple que:

$$\overline{f'g'} = 0 \quad \overline{f'g} = \overline{f}\overline{g} \quad \overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \quad (3.35)$$

También es claro que mientras que  $\overline{f'} \equiv 0$ , el promedio temporal del resultado del producto de dos cantidades fluctuantes no es igual a cero, i.e.  $\overline{f'f'} \neq 0$ . De hecho, la raíz cuadrática media de las fluctuaciones de la velocidad se conoce como intensidad de turbulencia.

Para el manejo de los flujos compresibles y las mezclas de gases en particular, el promedio ponderado con la masa (*mass-weighted averaging*) resulta conveniente. En esta aproximación definimos las variables ponderadas con la masa como  $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$ . Esto es:

$$\tilde{u} = \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} \quad \tilde{v} = \frac{\overline{\rho v}}{\bar{\rho}} \quad \tilde{w} = \frac{\overline{\rho w}}{\bar{\rho}} \quad \tilde{h} = \frac{\overline{\rho h}}{\bar{\rho}} \quad \tilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}} \quad \tilde{H} = \frac{\overline{\rho H}}{\bar{\rho}} \quad (3.36)$$

Notamos que solamente las componentes de la velocidad y las variables térmicas son ponderadas con la masa. Las propiedades del fluido tales como la densidad y la presión se tratan como en los párrafos anteriores. Para sustituir en las ecuaciones de conservación, se definen nuevas cantidades fluctuantes como:

$$u = \tilde{u} + u'' \quad v = \tilde{v} + v'' \quad w = \tilde{w} + w'' \quad h = \tilde{h} + h'' \quad T = \tilde{T} + T'' \quad H = \tilde{H} + H'' \quad (3.37)$$

Es muy importante notar que los promedios temporales de las propiedades doble prima, i.e.  $\overline{u''}$ ,  $\overline{v''}$ , etc., no son iguales a cero en general, a menos que  $\rho' = 0$ . De hecho se puede demostrar que  $\overline{u''} = -\overline{\rho' u'} / \bar{\rho}$ ,  $\overline{v''} = -\overline{\rho' v'} / \bar{\rho}$ , etc. En su lugar, el promedio temporal de una cantidad fluctuante doble prima multiplicada por la densidad es igual a cero.

$$\overline{\rho f''} \equiv 0 \quad (3.38)$$

La identidad anterior se puede establecer expandiendo  $\overline{\rho f} = \overline{\rho(\tilde{f} + f'')}$  y utilizando la definición de  $\tilde{f}$ .

### 3.2.2. Forma de Reynolds de la Ecuación de Continuidad

Comenzando con la ecuación de continuidad en el sistema de coordenadas Cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (3.39)$$

Primero, las variables se descomponen en las variables de tiempo convencionales promediadas más las componentes fluctuantes como se indica en las ecuaciones (3.33).

Toda la ecuación es entonces promediada en el tiempo, produciendo en notación subinicial:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' u'_j) = 0 \quad (3.40)$$

Tres de los términos son idénticamente cero como se indica en la identidad dada por la ecuación (3.34). Finalmente, la forma de Reynolds de la ecuación de continuidad en las variables promediadas de forma convencional se puede escribir:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j + \overline{\rho' u'_j}) = 0 \quad (3.41)$$

Sustituyendo las variables promediadas ponderadas con la masa más las fluctuaciones doble prima dadas por las ecuaciones (3.37) en la ecuación de continuidad, y promediando en el tiempo, toda la ecuación da:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u''_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho' u''_j}) = 0 \quad (3.42)$$

Dos de los términos en la ecuación (3.42) son obviamente idénticos a cero como es indicado. Además, los últimos dos términos pueden ser combinados, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u''_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho' u''_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u''_j} \quad (3.43)$$

lo cual es igual a cero de acuerdo a lo establecido por la ecuación (3.38). Esto permite que las variables de masa ponderada en la ecuación de continuidad puedan ser escritas como:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) = 0 \quad (3.44)$$

Nótese que la ecuación (3.44) es más compacta que la forma de la ecuación (3.41). Para flujos incompresibles,  $\rho' = 0$ , y las diferencias entre las variables convencionales y las variables de masa ponderada se desaparecen, de modo que la ecuaciones de continuidad se puede escribir como:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.45)$$

### Forma de Reynolds de la Ecuación de Conservación de la Cantidad de Movimiento

El desarrollo de la forma de Reynolds de las ecuaciones de momentum procede más fácilmente cuando comenzamos con las ecuaciones de momentum de Navier-Stokes en las formas de la divergencia o en la forma de la ley de conservación, ecuación (3.16). Trabajando primeramente con las variables convencionales promediadas, reemplazamos las variables dependientes en la ecuación de continuidad (3.16) con los promedios de tiempo más las fluctuaciones de acuerdo con la ecuación (3.33). Como ejemplo, la componente  $x$  resultante de la ecuación (3.16), después de despreciar las fuerzas de cuerpo se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')] + \frac{\partial}{\partial x} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')(\bar{u} + u') + (\bar{p} + p') - \tau_{xx}] \\ + \frac{\partial}{\partial y} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')(\bar{v} + v') - \tau_{yx}] \\ + \frac{\partial}{\partial z} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')(\bar{w} + w') - \tau_{zx}] = 0 \quad (3.46) \end{aligned}$$

Después, toda la ecuación es de tiempo promediado. Los términos que son lineales en las cantidades fluctuantes se hacen cero cuando se promedia el tiempo, como lo hicieron en la ecuación de continuidad. Varios términos desaparecen de esta manera, mientras que otros pueden ser grupos y que pueden hacerse cero a través del uso de la ecuación de continuidad. La ecuación de cantidad de movimiento en  $x$  de Reynolds puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \bar{u} \bar{u} + \bar{u} \overline{\rho' u'}) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho} \bar{u} \bar{v} + \bar{u} \overline{\rho' v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho} \bar{u} \bar{w} + \bar{u} \overline{\rho' w'}) \\
& = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) - \bar{u} \overline{\rho' u'} - \bar{\rho} \overline{u' u'} - \overline{\rho' u' u'} \right] \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \bar{v} \overline{\rho' u'} - \bar{\rho} \overline{u' v'} - \overline{\rho' u' v'} \right] \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \bar{w} \overline{\rho' u'} - \bar{\rho} \overline{u' w'} - \overline{\rho' u' w'} \right] \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones completas de momentum de Reynolds (para las tres componentes) pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \bar{u}_i + \overline{\rho' u'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \overline{\rho' u'_j}) \\
& = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\tau}_{ij} - \bar{u}_j \overline{\rho' u'_i} - \bar{\rho} \overline{u'_i u'_j} - \overline{\rho' u'_i u'_j} \right) \quad (3.48)
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] \quad (3.49)$$

Para desarrollar la ecuación de momentum de Reynolds en variables de masa ponderada, otra vez comenzamos con la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (3.16) pero utilizamos la descomposición indicada por la ecuación (3.37) para representar las variables instantáneas. Como un ejemplo, la componente en  $x$  resultante de la ecuación (3.16) se hace:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}[(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{u} + u'')] + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{u} + u'')(\tilde{u} + u'') + (\bar{p} + p') - \tau_{xx}] \\
+ \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{u} + u'')(\tilde{v} + v'') - \tau_{yx}] \\
+ \frac{\partial}{\partial z}[(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{u} + u'')(\tilde{w} + w'') - \tau_{zx}] = 0 \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Enseguida toda la ecuación completa es promediada en el tiempo, y la identidad dada por la ecuación (3.38) es utilizada para eliminar términos. La ecuación de momentum de Reynolds completa en variables de masa ponderada se hace:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}) \quad (3.51)$$

donde despreciando las fluctuaciones viscosas,  $\bar{\tau}_{ij}$  se hace:

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_k} \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial\overline{u''_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u''_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\overline{u''_k}}{\partial x_k} \right] \quad (3.52)$$

La ecuación de momentum, (3.51), en variables de masa ponderada es más simple en la forma que la ecuación correspondiente usando variables convencionales. Notamos sin embargo, que incluso cuando las fluctuaciones viscosas sean despreciables,  $\bar{\tau}_{ij}$  es más complejo en la ecuación (3.51) que la  $\bar{\tau}_{ij}$  que aparece en la ecuación convencional promediada, ecuación (3.49). En la práctica, se espera que los términos viscosos involucrados en las fluctuaciones doble prima sean pequeñas y sean candidatas para ser despreciados con base en argumentos de órdenes de magnitud.

Para flujos incompresibles la ecuación de momentum puede ser escrita en la forma simple:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\bar{u}_i\bar{u}_j) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}) \quad (3.53)$$

donde  $\bar{\tau}_{ij}$  toma la forma reducida:

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.54)$$

Como hemos notado en la conexión con la ecuación de continuidad, no hay diferencia entre las variables de masa ponderada y las variables convencionales para flujo incompresible

### Forma de Reynolds de la Ecuación de la Energía

Las variables térmicas  $H$ ,  $h$ , y  $T$  están relacionadas, y la ecuación de energía toma diferentes formas, dependiendo de cuál es elegida para ser la variable térmica transportada. Para desarrollar una forma común, iniciamos con la ecuación de energía dada por la ecuación (3.24). El término de generación  $\partial Q/\partial t$ , será despreciado. Suponiendo que la energía total está compuesta solo de energía interna y de energía cinética, y reemplazando  $E_t$ , por  $\rho H - p$ , podemos escribir la ecuación (3.24) en notación de adición como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j H + q_j - u_i \tau_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.55)$$

Para obtener la ecuación de energía de Reynolds en variables convencionales promediadas, reemplazamos las variables dependientes en la ecuación (3.55) con la descomposición indicada por la ecuación (3.33). Después de un promedio de tiempo, la ecuación se convierte en:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \bar{H} + \overline{\rho' H'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \bar{u}_j \bar{H} + \bar{\rho} \overline{u'_j H'} + \overline{\rho' u'_j H} + \overline{\rho' u'_j H'} + \bar{u}_j \overline{\rho' H'} - k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \\
&= \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{u}_i \left( -\frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) + \mu \bar{u}_i \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \overline{u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}} + \mu \left( \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) \right]
\end{aligned} \quad (3.56)$$

Frecuentemente es deseable utilizar la temperatura estática como una variable dependiente en la ecuación de energía. Iniciamos con la ecuación de la energía en función de la entalpía específica  $h$ , ecuación (3.29). Entonces emplearemos la definición de la entalpía específica,  $h = c_p T$  y escribimos la ecuación de la energía en la forma conservativa para proporcionar un punto de partida conveniente para el desarrollo de la forma promedio de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho c_p u_j T - k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \Phi \quad (3.57)$$

La función de disipación  $\Phi$  (ver ecuación (3.30)) puede ser escrita en términos de los componentes de velocidad utilizando la convención de suma como:

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] \quad (3.58)$$

Las variables en la ecuación (3.58) son reemplazadas con la descomposición indicada por la ecuación (3.33), y la ecuación resultante es promediada en el tiempo. Después de la eliminación de términos conocidos para ser cero, la ecuación de energía de Reynolds en términos de temperatura se hace:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(c_p \bar{\rho} \bar{T} + c_p \overline{\rho' T'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} c_p \bar{T} \bar{u}_j + c_p \bar{T} \overline{\rho' u'_j}) \\
&= \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \bar{\rho} c_p \overline{T' u'_j} - c_p \overline{\rho' T' u'_j} - \bar{u}_j c_p \overline{\rho' T'} \right) + \bar{\Phi}
\end{aligned} \quad (3.59)$$

donde:

$$\overline{\Phi} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\tau_{ij}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (3.60)$$

La  $\overline{\tau_{ij}}$  en la ecuación (3.60) debe ser evaluada como indica la ecuación (3.49).

Para desarrollar la forma de la ecuación de energía de Reynolds en variables de masa ponderada, reemplazamos las variables dependientes en la ecuación (3.55) con la descomposición indicada por la ecuación (3.37) y el tiempo hace un promedio de la ecuación entera. El resultado puede ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho \tilde{H}}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\rho \tilde{u}_j \tilde{H}} + \overline{\rho u'_j H''} - k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \overline{\tau_{ij}} + \overline{u'_i \tau_{ij}}) \quad (3.61)$$

donde  $\overline{\tau_{ij}}$  puede ser evaluada como está dado por la ecuación (3.52) en términos de las variables de masa ponderada.

En términos de temperatura estática, la ecuación de energía de Reynolds en variables de masa ponderada se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho c_p \tilde{T}}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho c_p \tilde{T} \tilde{u}_j}) &= \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial p}{\partial x_j}} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \overline{\tilde{T}}}{\partial x_j} + k \frac{\partial \overline{T''}}{\partial x_j} - c_p \overline{\rho T'' u'_j} \right) + \overline{\Phi} \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde:

$$\overline{\Phi} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\tau_{ij}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (3.63)$$

Para flujos incompresibles la ecuación de energía puede ser escrita en términos de entalpía total como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_j \bar{H} + \rho \overline{u'_j H'} - k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \\ = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \bar{u}_i \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \mu \left( \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

y en términos de temperatura estática como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_p \bar{T} \bar{u}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{T' u'_j} \right) + \bar{\Phi} \quad (3.65)$$

donde  $\bar{\Phi}$  se reduce ligeramente en complejidad debido a la desaparición del término dilatación volumétrica  $\bar{\tau}_{ij}$  para flujo incompresible.

### Particularidades de las Ecuaciones de Reynolds

A primera vista, las ecuaciones de Reynolds probablemente parecen bastante complejas y nos tientan a la pregunta si realmente hemos hecho cualquier progreso hacia la solución de problemas prácticos en el flujo turbulento. Seguramente, un problema principal en la mecánica de fluidos es que más ecuaciones pueden ser escritas de las que pueden ser resueltas. Afortunadamente, para muchos flujos importantes, las ecuaciones de Reynolds pueden ser simplificadas. Antes de que nos demos a la tarea de simplificar las ecuaciones, permitámonos examinar las ecuaciones de Reynolds más adelante.

Consideraremos un flujo turbulento incompresible primeramente e interpretaremos la ecuación de momentum de Reynolds en la forma de la ecuación (3.53). La ecuación gobierna el tiempo medio de movimiento del fluido, y reconocemos algunos términos familiares como el flujo de momentum y flujo laminar como términos de esfuerzos (stress terms) más algunos nuevos términos que involucran fluctuaciones que deben representar

esfuerzos turbulentos aparentes. Estos esfuerzos turbulentos aparentes se originan en los términos de flujo de momentum de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para decirlo de otra manera, las ecuaciones de movimiento medio relacionan la aceleración de partículas a los gradientes de esfuerzos, y como sabemos cómo se expresa la aceleración para el tiempo medio del movimiento, cualquier cosa nueva en estas ecuaciones deben ser gradientes de esfuerzo aparente debido al movimiento turbulento. Para ilustrarlo, utilizaremos la ecuación de continuidad para organizar la ecuación (3.53) en una forma en la cual la partícula (sustancial) aparezca derivada en el lado izquierdo

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}}}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}}}{\partial x_j} \quad (3.66)$$

donde  $(\bar{\tau}_{ij})_{\text{laminar}}$  es el mismo de la ecuación (3.54) y tiene la misma forma, en términos de las velocidades medias temporales, del tensor de esfuerzo del flujo laminar incompresible. El esfuerzo aparente turbulento se puede escribir como:

$$(\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}} = -\overline{\rho u'_i u'_j} \quad (3.67)$$

Estos esfuerzos aparentes son comúnmente llamados esfuerzos de Reynolds.

Para un flujo turbulento compresible, el etiquetado los términos de acuerdo con la aceleración del movimiento medio y esfuerzos aparentes se convierte en un reto. Usando procesos de promediado convencional, la presencia de términos como  $\overline{\rho' u'_i}$  pueden resultar en el flujo de momentum a través de las líneas de corriente de flujo medio, frustrando los intentos de categorizar los términos. El uso de un promedio de masas ponderadas elimina los términos  $\overline{\rho' u'_i}$  y provee una expresión compacta para la aceleración de la partícula pero complica la separación de esfuerzos en categorías puramente laminares como categorías turbulentas aparentes. Cuando se utilizan variables promediadas convencionalmente, los componentes fluctuantes de  $\bar{\tau}_{ij}$  desaparecen cuando las ecuaciones son promediadas en el

tiempo. Estas no desaparecen, excepto, cuando se utiliza un promedio de masa ponderada. Para ilustrarlo, vamos a organizar la ecuación (3.51) (usando la ecuación de continuidad) en una forma que utiliza la derivada sustancial y organiza los términos de la siguiente manera:

$$\bar{\rho} \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}}}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}}}{\partial x_j} \quad (3.68)$$

La forma de la ecuación (3.68) es idéntica a la de la ecuación (3.66) excepto que  $\tilde{u}_i$  reemplaza la  $\bar{u}_i$  usada en la ecuación (3.66). Si insistimos que  $(\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}}$  tiene la misma forma para un flujo laminar, entonces la segunda mitad de  $\bar{\tau}_{ij}$  de la ecuación (3.52) debería ser atribuida al transporte turbulento, resultando en:

$$(\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}} = \mu \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right] \quad (3.69)$$

y

$$(\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}} = -\overline{\rho u''_i u''_j} + \mu \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}''_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}''_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}''_k}{\partial x_k} \right] \quad (3.70)$$

Como antes, las fluctuaciones viscosas han sido despreciadas para obtener la ecuación (3.68). El segundo término en la expresión para  $(\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}}$  involucra a la viscosidad molecular y tiende a ser mucho más pequeño que el componente  $-\overline{\rho u''_i u''_j}$ .

Podemos realizar un análisis similar en la ecuación de la energía en la forma de Reynolds e identificar ciertos términos que involucran temperatura o fluctuaciones de entalpía como cantidades de flujo de calor aparente. Por ejemplo, en la ecuación (3.59) el término de flujo de calor es:

$$-(\nabla \cdot \vec{q})_{\text{lam}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \quad (3.71)$$

y la componente del flujo de calor *turbulento aparente* (Reynolds) es:

$$-(\nabla \cdot \vec{q})_{\text{turb}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\bar{\rho} c_p \overline{T' u'_j} - c_p \overline{\rho' T' u'_j} - \bar{u}_j c_p \overline{\rho' T'} \right) \quad (3.72)$$

Se darán futuros ejemplos que ilustran los términos de flujo de calor y la forma del esfuerzo de Reynolds en secciones subsecuentes que consideran las formas reducidas de las ecuaciones de Reynolds.

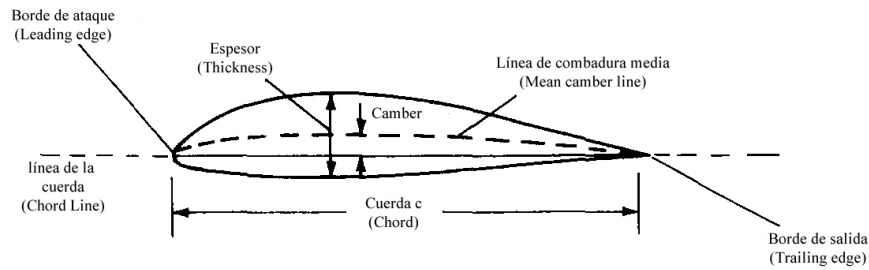
Las ecuaciones de Reynolds no pueden ser resueltas en la forma dada porque los nuevos esfuerzos turbulentos aparentes y las cantidades de flujo de calor deben ser vistos como nuevas incógnitas. Para proceder más adelante, necesitamos encontrar ecuaciones adicionales que involucren las nuevas incógnitas o hacer hipótesis respecto a la relación entre las nuevas cantidades turbulentas aparentes y las variables de tiempo de flujo medio. Esto se conoce como el problema de cierre, el cual se maneja más comúnmente a través del modelado de la turbulencia.

### 3.3. Principios Aerodinámicos y Leyes de Movimiento del Vórtice de Salida

#### 3.3.1. Características de un Perfil Aerodinámico

La primera patente publicada de un perfil aerodinámico fue elaborada por Horatio F. Phillips en 1884 [29]. En 1902, los hermanos Wright llevaron a cabo pruebas experimentales de sus propios perfiles en un túnel de viento, desarrollando geometrías relativamente eficientes, lo cual contribuyó al éxito en su primer vuelo en Diciembre de 1903 [29]. A principios de 1930, NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) precursor de la NASA (National Aeronautics and Space Administration) realizó una serie de experimentos aerodinámicos definitivos con formas aerodinámicas que se construyeron de forma racional y sistemática. Muchos de estos perfiles aerodinámicos NACA son de uso común





**Figura 3.1:** Nomenclatura de un perfil aerodinámico

hoy en día.

Considerando un perfil aerodinámico como el que se observa en la figura 3.1, se le llama la *línea de combadura media* a la curva geométrica de puntos igualmente distantes de las superficies superior e inferior del perfil aerodinámico. Los puntos delantero y trasero del perfil aerodinámico son llamados *borde de ataque* y *borde de salida*, la línea recta que une estos dos puntos se llama *cuerda aerodinámica* ( $c$ ). La línea superior e inferior son llamados *extradós* e *intradós*. El *espeor* es la distancia entre la línea superior e inferior del perfil aerodinámico, también medido perpendicularmente a la línea de combadura media. La distancia máxima entre la línea de combadura media y la línea de la cuerda aerodinámica es definida como *combadura*. Los perfiles NACA se engloban según sus características: perfiles de serie de 4 dígitos, 5 dígitos, 6 dígitos, etc.

Para ángulos de ataque bajos a moderados, el coeficiente de sustentación varía linealmente con respecto al ángulo de ataque. La pendiente de esta línea recta se denota como  $a_0$  y se le conoce como *pendiente de sustentación* (lift slope). En esta condición, el flujo se mueve suavemente sobre el perfil aerodinámico y se mantiene adherido sobre la mayor parte de la superficie. Sin embargo, a medida que el ángulo de ataque se incrementa, el flujo tiende a separarse de la superficie superior del perfil, creando una gran estela que se comporta prácticamente como una *zona muerta* de aire. Dentro de esta región separada, el flujo recircula, y parte del flujo incluso se mueve en la dirección opuesta a la corriente libre; a este se le conoce como flujo invertido. Esta separación de flujo es debida a efec-

tos viscosos y la aparición de gradientes adversos de presión. La consecuencia de esta separación de flujo a ángulos de ataque altos es una reducción abrupta en la fuerza de sustentación y un incremento elevado en la fuerza de arrastre. Bajo esas condiciones se dice que el perfil aerodinámico entró en pérdida. Los perfiles se pueden dividir en dos tipos: simétricos y asimétricos. Anderson [29] discute que un perfil simétrico es un perfil sin combadura, es decir, la línea de combadura media y la cuerda aerodinámica coinciden. Claramente en los perfiles simétricos, el extradós es simétrico al intradós con respecto a la línea de combadura media. Debido a esta condición geométrica, el perfil simétrico tiene un bajo costo y es de fácil construcción con respecto a un perfil asimétrico. Por otra parte, los perfiles asimétricos tienen la ventaja de generar mayor sustentación y mejores prestaciones ante la entrada en pérdida de sustentación o desplome, la cual ocurre a altos ángulos de ataque.

El comportamiento físico para la generación de la fuerza de sustentación y arrastre en un perfil aerodinámico es debido a la existencia de una zona de alta presión en la superficie del intradós y una zona de baja presión en la superficie del extradós. Este desequilibrio neto de la distribución de presión es producido por la diferencia de velocidades del viento relativo en el extradós e intradós del perfil aerodinámico. El coeficiente de sustentación y arrastre matemáticamente son representados como números adimensionales en función del número de Reynolds y del ángulo de ataque.

Donde el coeficiente de sustentación bidimensional  $c_l$  se define como:

$$c_l = \frac{L'}{1/2\rho V^2 c} \quad (3.73)$$

y el coeficiente de arrastre bidimensional  $c_d$  se define como:

$$c_d = \frac{D'}{1/2\rho V^2 c} \quad (3.74)$$

donde  $L'$  y  $D'$  son las fuerzas de sustentación y arrastre por unidad de envergadura res-

pectivamente,  $\rho$  es la densidad del aire,  $V$  la velocidad de corriente libre y  $c$  la cuerda del perfil aerodinámico.

### Características de un Perfil NACA 0012

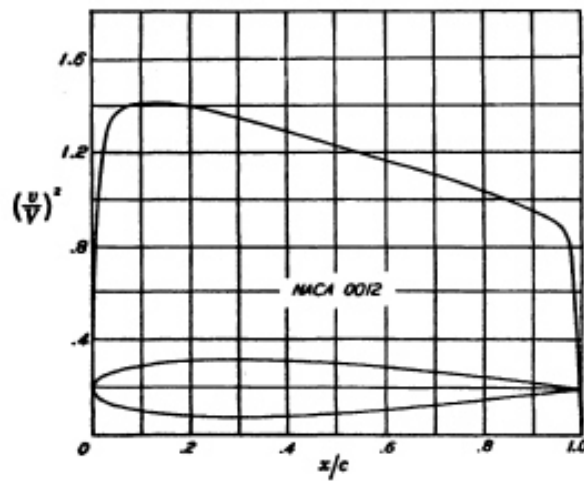
Por otro lado, el perfil NACA 0012 es uno de los más antiguos y sin duda el más probado de todas las superficies de sustentación, y se ha estudiado en docenas de túneles de viento durante un periodo de más de 50 años. Posee grandes aplicaciones en la aviación general, y es utilizado en los estabilizadores horizontales, jets supersónicos, palas de helicópteros, soportes, aletas de misiles y cohetes. El perfil NACA 0012 presenta algunas ventajas: buenas características de pérdida, pequeño movimiento del centro de presiones a lo largo del rango de gran velocidad. Sin embargo, presenta algunas desventajas: bajo coeficiente de sustentación, gran arrastre y un elevado momento de cabeceo.

El perfil aerodinámico NACA0012 es un perfil simétrico de 4 dígitos. El primer dígito especifica la combadura con un 0 % de la cuerda aerodinámica, el segundo indica la posición donde la combadura es máxima con un valor de 0, y los últimos dígitos indican el espesor máximo del perfil con un 12 % de la cuerda aerodinámica. La ecuación de superficie que describe el perfil NACA0012 es la siguiente:

$$y_t = 0.6c \left[ 0.2969 \sqrt{\frac{x}{c}} - 0.1260 \left( \frac{x}{c} \right) - 0.3516 \left( \frac{x}{c} \right)^2 + 0.2843 \left( \frac{x}{c} \right)^3 - 0.1015 \left( \frac{x}{c} \right)^4 \right] \quad (3.75)$$

donde  $c$  representa la cuerda aerodinámica,  $x$  es la posición a lo largo de la cuerda aerodinámica, desde 0 hasta  $c$ , y  $y_t$  es la mitad del espesor en función del valor de  $x$ .

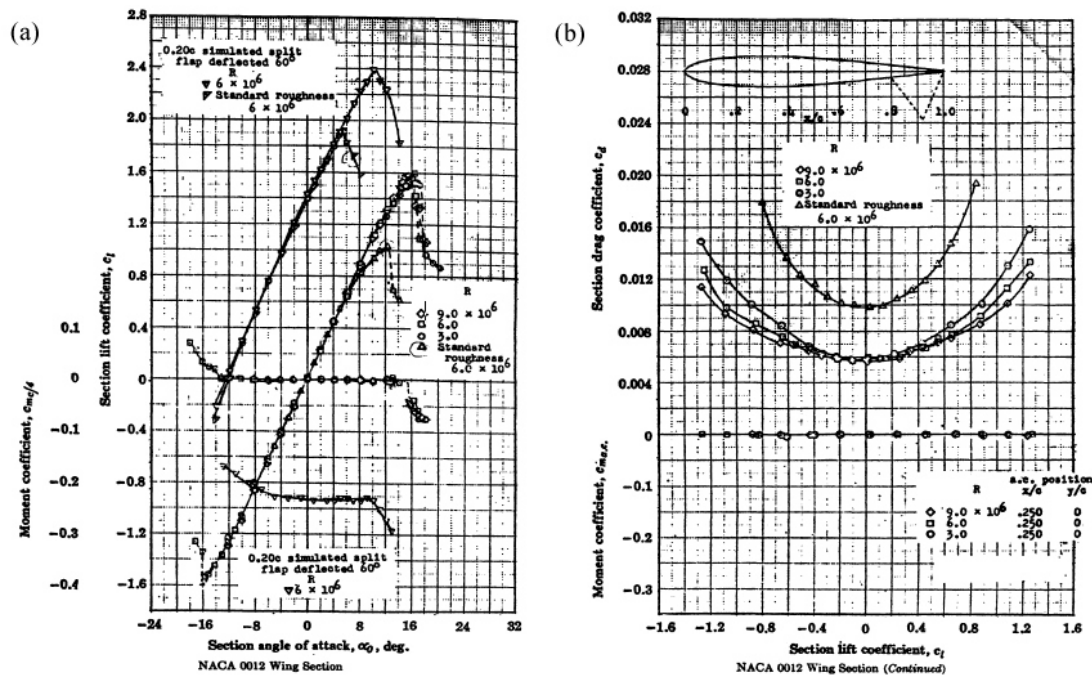
En la figura 3.2 se puede observar la gráfica del cuadrado de la relación de la velocidad local ( $v$ ) y la velocidad de la corriente libre ( $V$ ) a lo largo de la superficie del perfil NACA0012 en una configuración de cero sustentación. Con estas condiciones es posible obtener una relación máxima de  $v/V \approx 1.188$  en la región acotada entre 10 – 15 % de la cuerda aerodinámica partiendo desde el borde de ataque del perfil NACA0012.



**Figura 3.2:** Gráfica del cuadrado de la relación de velocidad local con respecto a la corriente libre a lo largo de la superficie del perfil NACA0012. Referencia: Ira. H. Abbott, Albert E. Von. Doenhoff [47]

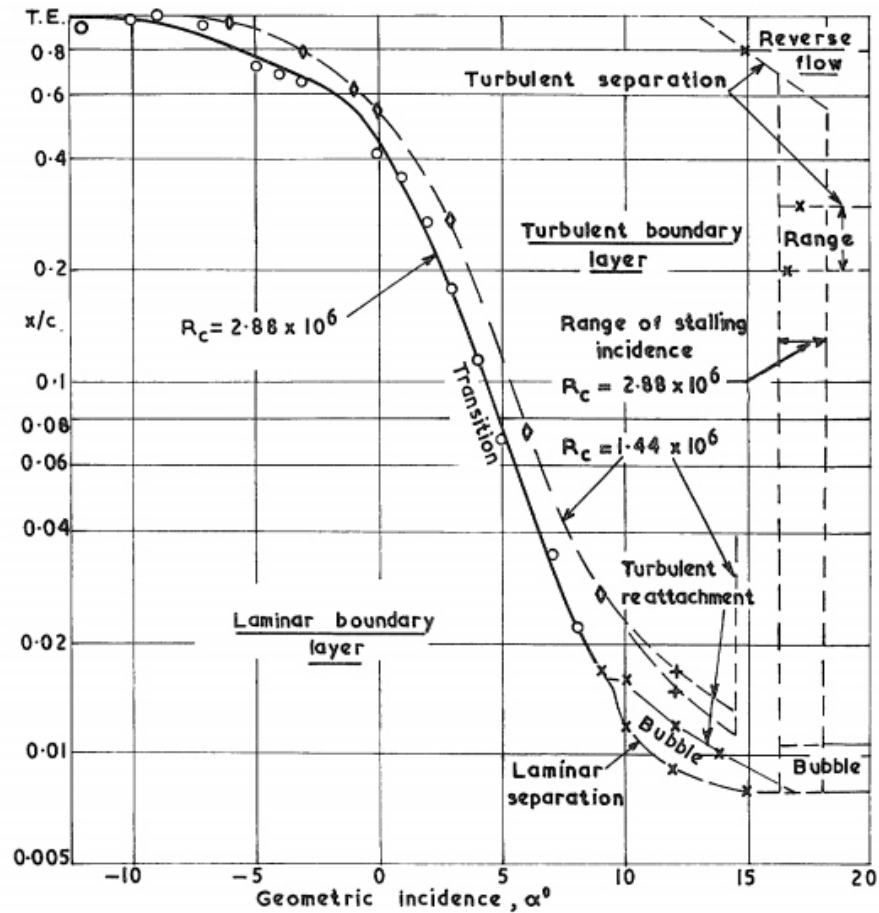
Los coeficientes de sustentación, arrastre y momento del perfil NACA0012 son mostrados en la figura 3.3. En la figura 3.3a se puede apreciar los coeficientes de sustentación y momento en función del ángulo de ataque para un perfil NACA0012 con y sin deflexión de split flap a distintos números de Reynolds. Para números de Reynolds entre  $3 - 9 \times 10^6$ , el perfil NACA0012 adquiere un coeficiente de sustentación máximo de  $c_{l,max} \approx 1.6$  para un ángulo de ataque de  $\alpha = 16$ , el cuál disminuye por efectos de rugosidad e incrementa al deflectar los flaps. El incremento del coeficiente de arrastre  $c_d$  en términos del coeficiente de sustentación  $c_l$  se intensifica a medida que aumenta el número de Reynolds, como se muestra en la figura 3.3b.

La caracterización de los coeficientes de sustentación y arrastre depende del comportamiento de la capa límite que se desarrolla sobre la superficie del perfil aerodinámico. En el caso de un perfil a ángulos de ataque moderadamente bajos, la capa límite está adherida sobre todo o la mayor parte de la superficie del perfil, por lo contrario, cuando el ángulo de ataque es grande, la capa límite se separa debido al fuerte crecimiento que experimenta la presión a partir del punto donde alcanza su valor mínimo, que generalmente está situado



**Figura 3.3:** (a)Relación del coeficiente de sustentación con respecto al ángulo de ataque. (b)Relación del coeficiente de arrastre con respecto al coeficiente de sustentación. Referencia:Ira. H. Abbott, Albert E. Von. Doenhoff [47]

en una posición próxima a la del punto de máximo espesor del perfil. Para el caso del perfil NACA0012 manteniendo un ángulo de ataque de  $\alpha = 10$ , la transición a la capa de amortiguamiento ocurre entre 0.01 y 0.02 para números de Reynolds de  $1.44 \times 10^6$  y  $2.88 \times 10^6$ . Presenta un flujo reversible (separación de la capa límite turbulenta) aproximadamente a un ángulo de ataque de 13, muy cerca del borde de salida. Para ángulos de ataque  $\alpha > 16$ , el desprendimiento de la capa límite turbulenta ocurre en la zona cercana del borde de ataque, éste es debido a que la cantidad de movimiento del flujo le impide adaptarse al borde y se separa de la misma. Este efecto no permite desarrollar un desequilibrio neto de la distribución de presión sobre las superficies del extradós e intradós, produciendo un decaimiento del coeficiente de sustentación  $c_l$ ; este punto es llamado: entrada en pérdida del perfil (Stall).

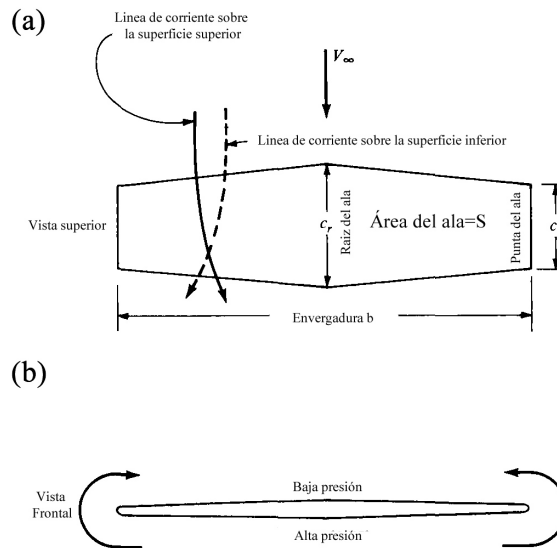


**Figura 3.4:** Límites del régimen de flujo a un número de Reynolds de  $2.88 \times 10^6$  y  $1.44 \times 10^6$ . Referencia: N. Gregory and C. L. O Reilly [48]

### 3.3.2. Teoría Clásica de Línea de Sustentación de Prandtl

La primera teoría práctica para predecir las propiedades aerodinámicas de un ala finita fue desarrollada por Ludwig Prandtl en Göttingen, Alemania (1911-1918). La teoría de Prandtl es fundamental para calcular de manera preliminar las características de un ala finita.

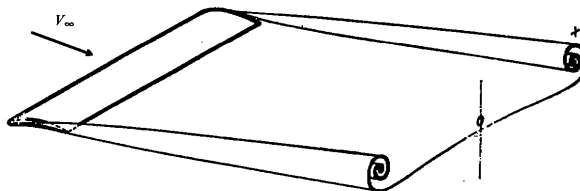
Partimos del concepto de un ala de envergadura finita en la que el flujo sobre el ala es tridimensional como consecuencia de la existencia de las puntas, donde se presentan



**Figura 3.5:** Curvatura de las líneas de corriente sobre la superficie superior e inferior del ala finita

cambios abruptos en los campos de velocidad y de presión. Podemos observar en la figura 3.5a, la vista superior del ala finita. La fuerza de sustentación se debe a la existencia de una zona de alta presión en la superficie inferior y una zona de baja presión en la superficie superior. Este desequilibrio neto en la distribución de presión crea la fuerza de sustentación. Sin embargo, también existe un subproducto de este desequilibrio en las puntas del ala, el flujo se tiende a curvar alrededor, como se observa en la figura 3.5b.

El flujo crea un movimiento circulatorio que es arrastrado aguas abajo del ala, creando una estela de vorticidad en cada punta. Estos vórtices de punta o vórtices de salida son esencialmente torbellinos débiles que arrastran partículas de aire vecinas corriente abajo, lo cual induce una pequeña componente de velocidad en la dirección hacia abajo en el ala. El fenómeno de inducción de la componente de velocidad en la dirección hacia abajo es llamado *Downwash*, denotado por el símbolo  $w$ . La combinación del efecto de este flujo con la velocidad de corriente libre  $V_\infty$  producen una velocidad relativa local que tiene componente hacia abajo en las proximidades de cada sección de perfil aerodinámico sobre el ala.



**Figura 3.6:** Esquema de los vórtices de salida

Para establecer una teoría racional de la aerodinámica de un ala finita, Prandtl propuso que un flujo con vorticidad, puede ser simplificado como un filamento de vorticidad, donde el filamento induce un campo vectorial alrededor del espacio.

El físico alemán, Hermann von Helmholtz fue el primero en hacer uso del concepto de filamento de vorticidad en un análisis de un fluido no viscoso e incompresible. En el proceso, él estableció dos principios fundamentales, conocidos como teorema de vorticidad de Helmholtz:

- 1.- La intensidad de un filamento de vorticidad es constante a lo largo de su longitud.
- 2.- Un filamento de vorticidad no puede terminar en un fluido; por lo tanto, sus fronteras deberán extenderse (las cuales pueden suponerse  $\pm\infty$ ) o formar una trayectoria cerrada.

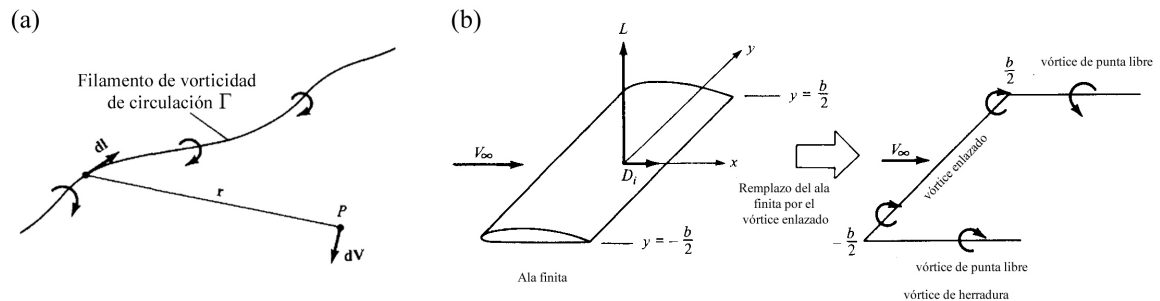
Consideramos un segmento del filamento  $d\vec{l}$  el cual puede ser identificado como una curva arbitraria, como se muestra en la figura 3.7a. El vector radial desde  $d\vec{l}$  a un punto P arbitrario en el espacio es  $\vec{r}$ . La velocidad inducida  $d\vec{V}$  por el segmento  $d\vec{l}$  puede ser expresada por la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (3.76)$$

donde  $\vec{r}_0$  es el vector de desplazamiento desde el marco de referencia al filamento  $d\vec{l}$ .

Prandtl propuso lo siguiente, un filamento de vorticidad de circulación  $\Gamma$  es de alguna manera enlazado a una localización fija del fluido (a esto se le llama vórtice enlazado) el





**Figura 3.7:** (a) Filamento de vorticidad e ilustración de la ley de Biot-Savart, (b) Remplazo del ala finita por un vórtice enlazado

cual experimenta una fuerza  $L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$  por el teorema Kutta-Joukowski. Este vórtice enlazado a diferencia de un *vórtice libre*, se mueve con los mismos elementos del fluido a lo largo del flujo. Por consiguiente, es posible suponer un ala finita de envergadura  $b$  por un vórtice enlazado, el cual se extiende desde  $y = -b/2$  hasta  $y = b/2$ , tal como se observa en la figura 3.7b. El filamento de vorticidad es considerado como dos vórtices de punta continuos desde los extremos del ala hasta el infinito, cumpliendo el teorema de Helmholtz. El vórtice formado por la suma del vórtice enlazado y los dos vórtices de punta es llamado vórtice de herradura.

En la figura 3.8 se puede observar un vórtice de herradura. Si consideramos que  $w$ , a lo largo de la línea del vórtice enlazado desde  $y = -b/2$  hasta  $y = b/2$ , es inducido por el vórtice de herradura respecto al marco de referencia XYZ ubicado en el centro de la línea del vórtice enlazado, entonces  $w$  es una componente de la velocidad en la dirección Z, la cuál puede tener un valor negativo cuando es inducido en dirección descendente y es positivo cuando es inducido en dirección ascendente. Partiendo de la ecuación de Biot-Savart, la velocidad inducida puede calcularse resolviendo la siguiente integral:

$$d\vec{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times [-\hat{l} - (b/2 - y)\hat{j}]}{\|-\hat{l} - (b/2 - y)\hat{j}\|^3} + \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times [-\hat{l} + (b/2 + y)\hat{j}]}{\|-\hat{l} + (b/2 + y)\hat{j}\|^3} \quad (3.77)$$

Utilizando cambio de variable, la velocidad inducida puede escribirse como:

$$\vec{w} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(b/2 - y) \operatorname{sen}(\tau) d\tau}{(b/2 - y)^2} - \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(b/2 + y) \operatorname{sen}(\chi) d\chi}{(b/2 + y)^2} \quad (3.78)$$

donde  $d\vec{l} = -\left(\frac{b}{2} - y\right) csc^2(\tau) d\tau = \left(\frac{b}{2} + y\right) csc^2(\chi) d\chi$ . Aplicando el límite de integración de 0 a  $\pi/2$  con respecto a  $\theta$ , la solución es:

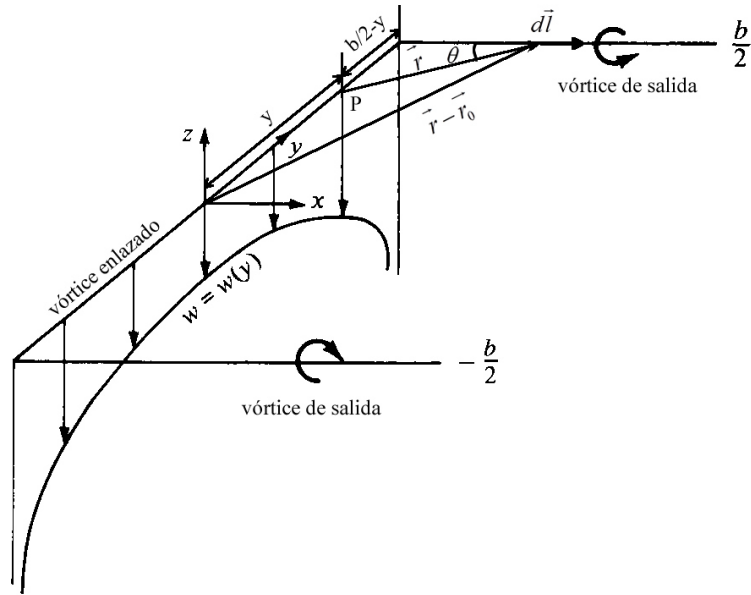
$$\vec{w} = -\frac{\Gamma}{4\pi(b/2 - y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(b/2 + y)} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{(b/2)^2 - y^2} \quad (3.79)$$

La ecuación (3.79) representa la velocidad inducida por un vórtice de herradura. Dado que esta ecuación no predice un resultado físicamente admisible sobre un ala finita. Prandtl propuso considerar un número infinito de vórtices herradura con distintas longitudes de vórtices enlazados, cada uno con una circulación extremadamente pequeña  $d\Gamma$ . Todos los vórtices enlazados son consistentes a lo largo de una línea simple, llamada *línea de sustentación*. Un número infinito de pequeños segmentos de líneas de sustentación  $dy$ , donde el cambio de circulación sobre un segmento  $dy$  es  $d\Gamma = (d\Gamma/dy) dy$ . Si consideramos en una ubicación arbitraria  $y_0$  a lo largo de la línea de sustentación (como se observa en la figura (3.9)), cualquier segmento de los vórtices de punta  $dx$  inducirá una velocidad en  $y_0$  con magnitud y dirección dada por la ecuación de Biot-Savart (3.76). Por su parte, la velocidad  $dw$  en  $y_0$  es inducida por un vórtice de punta semi-infinito localizado en  $y$ ; dada la ecuación  $V = \frac{\Gamma}{4\pi h}$ , en términos de la imagen mostrada en la figura (3.9):

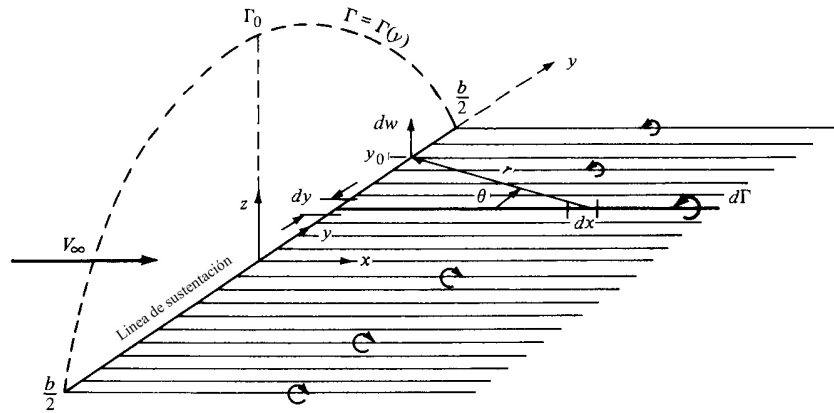
$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy) dy}{4\pi(y_0 - y)} \quad (3.80)$$

El signo negativo en la ecuación (3.80) es necesario para la consistencia con la figura 3.9, para el vórtice de salida mostrado, la dirección de  $dw$  en  $y_0$  es ascendente y por lo tanto presenta un valor positivo, mientras que  $\Gamma$  es decreciente en la dirección  $y$ , haciendo  $d\Gamma/dy$  una cantidad negativa. El signo menos en la ecuación (3.80) hace que valores positivos de  $dw$  sean consistentes con el valor negativo de  $d\Gamma/dy$ .

La velocidad total  $w$  inducida en  $y_0$  por la hoja del vórtice de punta es la integral de la ecuación (3.80) sobre todos los filamentos de vorticidad desde  $-b/2$  hasta  $b/2$ .



**Figura 3.8:** Distribución *downwash* a lo largo del eje Y para un vórtice de herradura



**Figura 3.9:** Sumatoria de un número infinito de vórtices herradura a lo largo de la línea de sustentación

$$\vec{w} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy}{y_0 - y} \quad (3.81)$$

Para una sección local del perfil aerodinámico de un ala finita, localizada en un punto

arbitrario  $y_0$  a lo largo de la envergadura, el ángulo de ataque inducido, es el siguiente:

$$\alpha_i(y_0) \approx -\frac{w(y_0)}{V_\infty} \quad (3.82)$$

Por la definición del coeficiente de sustentación y el teorema de Kutta-Joukowski, tenemos que:  $L' = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) c_l = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$ . Podemos expresar el coeficiente de sustentación de una sección local del perfil  $y_0$  como:

$$c_l = 2\pi \left[ \alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0} \right] = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} \quad (3.83)$$

donde  $\alpha_{eff}$  es el ángulo efectivo,  $\alpha_{L=0}$  es el ángulo de ataque de cero sustentación y  $\alpha$  es el ángulo de ataque. Dado que:  $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$  es posible llegar al modelo siguiente:

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy}{y_0 - y} \quad (3.84)$$

La ecuación (3.84) es el modelo fundamental de la teoría de línea de sustentación de Prandtl. Dicho modelo indica simplemente que el ángulo de ataque geométrico es igual a la suma del ángulo efectivo más el ángulo de ataque inducido. Con la ecuación (3.84) es posible determinar los modelos y calcular el valor de los coeficientes de sustentación (ecuación (3.85)), y arrastre inducido (ecuación (3.86)) [29].

$$C_L = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (3.85)$$

$$C_{D,i} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (3.86)$$

### 3.3.3. Análisis de Vórtices Laminares

Algunos autores han investigado analíticamente la estructura laminar del vórtice de salida. Aunque en los números de Reynolds que se encuentra en las aplicaciones prácticas

los vórtices de salida son turbulentos, muchas características de un vórtice laminar todavía están presentes en un vórtice turbulento [23].

Batchelor [45] realizó un análisis del flujo axial en un vórtice de salida laminar, partiendo de la ecuación de cantidad de movimiento para un flujo incompresible, axisimétrico y estacionario. Consideró que los gradientes axiales son de magnitud menor que los gradientes radiales, como se muestra en la expresión siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z} \ll \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.87)$$

Si consideramos que  $(u, v, w)$  son las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , una aproximación válida en un campo lejano corriente abajo a lo largo del eje axial del vórtice, fue considerar que la velocidad en la componente radial es pequeña con respecto a la velocidad axial del vórtice.

$$u \ll w \quad (3.88)$$

Las ecuaciones parabólicas linealizadas se resuelven con la condición de frontera donde la velocidad tangencial del campo lejano tiende a convertirse en un vórtice potencial:  $rv \rightarrow \text{constante} \equiv \Gamma_0/(2\pi)$  si  $r \rightarrow \infty$ , donde  $\Gamma_0$  es la circulación del vórtice, y la velocidad axial tiende a la velocidad de corriente libre  $W_\infty$ . Batchelor [45] encontró una solución similar para las componentes de la velocidad:

$$u(r, z) = 0 \quad (3.89)$$

$$v(r, z) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left[ 1 - e^{-W_\infty r^2/(4\nu z)} \right] \quad (3.90)$$

$$w(r, z) = W_\infty + \frac{\Gamma_0^2}{32\pi^2 \nu z} B\left(\frac{W_\infty r^2}{4\nu z}\right) - \left[ \frac{\Gamma_0^2}{32\pi^2 \nu} \ln\left(\frac{W_\infty z}{\nu}\right) + \frac{W_\infty^2 L}{8\nu} \right] \frac{e^{-W_\infty r^2/(4\nu z)}}{z} \quad (3.91)$$

donde

$$B(\xi) \equiv e^{-\xi} [\ln(\xi) + E_1(\xi) - 0.807] + 2E_1(\xi) - 2E_1(2\xi) \quad (3.92)$$

y  $E_1(\xi) \equiv \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$  es una función integral exponencial, y  $L$  es una constante con dimensiones de área.

Suponiendo al núcleo viscoso del vórtice, el cual está rodeado por un campo irrotacional (flujo potencial), como un cuerpo sólido en rotación con respecto a la línea central del vórtice, la velocidad tangencial del vórtice puede proponerse de la siguiente forma:

$$V_{\theta} = \frac{\Omega a^2}{r}, r \geq a \quad (3.93)$$

$$V_{\theta} = \Omega r, r < a \quad (3.94)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular del cuerpo sólido en rotación y  $a$  es el radio de la región viscosa en el núcleo, también definido como el punto de máxima velocidad tangencial.

$$V_x = \left( U_{\infty}^2 + 2\Omega^2(a^2 - r^2 - 2\Delta H) \right)^{1/2}, r \leq a \quad (3.95)$$

La ecuación (3.95) demuestra que a medida que el vórtice se enrolla genera mayor velocidad tangencial, la fuerza de presión produce un fuerte flujo corriente abajo en el núcleo del vórtice, proporcionando solo una pequeña pérdida. Del mismo modo, como la velocidad tangencial decae en el campo lejano de la corriente, las fuerzas de presión actuarán para desacelerar el flujo axial en el núcleo.

Moore y Saffman [46] trataron de mejorar el análisis de Batchelor, estudiando la influencia de la viscosidad en el flujo axial en un vórtice laminar. Su solución para un ala rectangular semi-infinita da dos perfiles axiales diferentes de la línea central del vórtice y el borde exterior del núcleo viscoso, respectivamente:

$$\frac{V_{x,cl} - U_{\infty}}{U_{\infty}} = -2.4 \times 10^{-5} \alpha^2 Re_c^{1/2} \left(\frac{c}{x}\right)^{1/2} + 0.28 \left(\frac{c}{x}\right)^{1/2} \quad (3.96)$$

$$\frac{V_{x,cl} - U_{\infty}}{U_{\infty}} = [0.93 \times 10^{-4} \alpha^2 - 0.32 Re_c^{-1/2}] \left(\frac{c}{r}\right) \quad (3.97)$$

donde  $Re_c$  es el número de Reynolds basado en la cuerda aerodinámica. La ecuación (3.96) sugiere un déficit en la velocidad axial en la línea central del vórtice, el cual incrementa con  $Re_c$  y con el ángulo de ataque. La ecuación (3.97) puede conducir a un exceso o déficit de velocidad axial en el borde exterior del núcleo viscoso.

### 3.3.4. Análisis de Vórtices Turbulentos

Los últimos estudios analíticos realizados en un vórtice de salida turbulento han supuesto una viscosidad de Eddy isotrópica para representar el comportamiento de la turbulencia. Se ha observado que este tipo de aproximación fracasa gravemente para un campo cercano al vórtice, esto es debido a que los esfuerzos de Reynolds medidos experimentalmente indican que el tensor de esfuerzos de Reynolds y la velocidad media de deformación no están alineados. Lo que indica que un método de predicción en función de la viscosidad-eddy-isotrópica no puede modelar con precisión la turbulencia en el vórtice [23].

## CAPÍTULO

### 4

# MODELADO DE LA TURBULENCIA

### 4.1. Introducción

Boussinesq [35] sugirió, que los esfuerzos cortantes turbulentos aparentes podrían estar relacionados con el rango de la deformación media a través de un escalar turbulento aparente o la viscosidad de *eddy*. Para el tensor general de esfuerzos de Reynolds, la hipótesis de Boussinesq es:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\left(\mu_T \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \rho \bar{k}\right) \quad (4.1)$$

donde  $\mu_T$  es la viscosidad turbulenta,  $\bar{k}$  es la energía cinética de la turbulencia,  $\bar{k} = \overline{u'_i u'_i}/2$



y el rango del tensor de esfuerzos medio  $S_{ij}$  está dado por:

$$S_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2)$$

Por facilidad se utiliza la convención de omitir las barras sobre las variables promediadas en el tiempo.

Por analogía con la teoría cinética, por el cual la viscosidad molecular para gases puede ser evaluada con precisión razonable, podríamos esperar que la viscosidad turbulenta puede ser modelada como:

$$\mu_T = \rho \nu_T l \quad (4.3)$$

donde  $\nu_T$  y  $l$  son escalas de velocidad y longitud características de la turbulencia, respectivamente. El problema, por supuesto, es encontrar los medios adecuados para la evaluación de la  $\nu_T$  y la  $l$ . Los modelos de turbulencia para cerrar las ecuaciones de Reynolds pueden ser divididas en dos categorías, de acuerdo con o no con la hipótesis de Boussinesq. Los modelos que emplean la hipótesis de Boussinesq, son conocidos como categoría I, o modelos de viscosidad turbulenta. Estos son conocidos como modelos de primer orden. Muchos de los modelos empleados en los cálculos ingenieriles son de este tipo. La evidencia experimental indica que la hipótesis de la viscosidad turbulenta es válida en muchas de las circunstancias del flujo. Existen excepciones, sin embargo, no hay requerimientos físicos que las mantengan. Los modelos que afectan el cierre de las ecuaciones de Reynolds sin esta hipótesis (Boussinesq) se conocen como modelos de la categoría II e incluyen los conocidos como esfuerzos de Reynolds o modelos de ecuación-esfuerzo. Los modelos de ecuación-esfuerzo (stress-equation model) son también conocidos como modelos de segundo orden o modelos de segundo momento de cierre.

La otra nomenclatura común de modelos es de acuerdo al número de ecuaciones di-

ferenciales parciales suplementarias que deben ser resueltas de acuerdo con el fin de suministrar los parámetros de modelado. De acuerdo a Donaldson y Rosenbaum [36], este número va de cero para los modelos algebraicos más simples hasta 12 para los modelos de esfuerzo de Reynolds más complejos.

Los modelos de categoría III deben ser definidos como aquellos que no son basados completamente en las ecuaciones de Reynolds. Las simulaciones de remolinos de mayor escala (*Large-Eddy Simulation LES*) caen en esta categoría, debido a que son un conjunto filtrado de ecuaciones de conservación que son resueltas en vez de las ecuaciones de Reynolds.

Cuando volvemos a los ejemplos de modelos de turbulencia específicas, será útil tener en mente un conjunto de ecuaciones de conservación del ejemplo que el modelado de turbulencia necesita. Las ecuaciones de la capa delgada de cortantes (*thin-shear-layer*), sirven razonablemente bien para este propósito. En las ecuaciones de la capa delgada de cortantes incompresible axisimétrica 2-D, la tarea de modelado reduce a las expresiones encontradas para  $-\rho\overline{v'u'}$  y  $\rho c_p\overline{v'T'}$ .

## 4.2. Modelos de turbulencia de una ecuación

Un defecto evidente de los modelos de viscosidad algebraicos que normalmente evalúan  $\nu_T$ , en la expresión  $\mu_T = \rho\nu_T l$  como  $\nu_T = l |\partial u/\partial y|$ , es que  $\mu_T = k_T = 0$  siempre que  $\partial u/\partial y = 0$ . Esto sugiere que  $\mu_T$  y  $k_T$  deberán de ser cero en la línea central de una tubería, en regiones cerca de la mezcla de un chorro de pared con una corriente principal o en el flujo a través de un anillo o entre paredes paralelas donde una pared es calentada y la otra enfriada. Mediciones (y el sentido común) indican que  $\mu_T$  y  $k_T$  no son cero bajo todas las condiciones siempre que  $\partial u/\partial y = 0$ . Los modelos de mezcla de longitud pueden ser *reparados* para superar esta deficiencia, pero este defecto conceptual provee motivación para considerar otras interpretaciones para  $\mu_T$  y  $k_T$ . Para ser justos con los modelos algebrai-

cos, debemos mencionar que estos defectos no siempre son cruciales porque los esfuerzos de Reynolds y flujos de calor son frecuentemente pequeños cuando  $\partial u / \partial y = 0$ . Malik y Pletcher [37] ilustran este punto con algunos ejemplos.

Una sugerencia de Prandtl y Kolmogorov en los años de 1940 fue considerar a  $\nu_T$  y  $\mu_T = \rho \nu_T l$  como proporcionales a la raíz cuadrada de la energía cinética de la turbulencia  $\bar{k} = \overline{u'_i u'_i} / 2$ . Por lo que la viscosidad turbulenta puede ser evaluada como:

$$\mu_T = C_k \rho l (\bar{k})^{1/2} \quad (4.4)$$

y  $\mu_T$  ya no es igual a cero cuando  $\partial u / \partial y = 0$ . La energía cinética de la turbulencia es una cantidad medible y es fácilmente interpretada físicamente. Como es natural, nos preguntaremos como predecir  $\bar{k}$ .

Una ecuación diferencial en derivadas parciales se puede desarrollar para  $\bar{k}$  a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para flujos incompresibles, la ecuación toma la forma:

$$\rho \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} - \overline{p' u'_j} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \quad (4.5)$$

El término  $-\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} - \overline{p' u'_j}$  es típicamente modelado como un proceso de difusión de gradiente

$$-\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} - \overline{p' u'_j} = \frac{\mu_T}{\text{Pr}_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \quad (4.6)$$

donde  $\text{Pr}_k$  es un número de Prandtl turbulento para energía cinética turbulenta y como tal, es puramente una constante de cierre. Usando la hipótesis de viscosidad de remolino de Boussinesq, el segundo término del lado derecho se convierte en:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left( 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{k} \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.7)$$

El último término del lado derecho de la ecuación (4.5) es la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta por unidad de volumen,  $\rho\epsilon$ . Basada en argumentos dimensionales, la tasa de disipación de la energía turbulenta está dada por  $\epsilon = C_D \bar{k}^{3/2}/l$ . Por lo que la forma del modelo de la ecuación de energía cinética turbulenta es:

$$\rho \frac{D\bar{k}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_T / Pr_k) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + \left( 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{k} \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_D \bar{\rho} \bar{k}^{3/2} / l \quad (4.8)$$

La interpretación física de varios términos está indicada por la ecuación (4.8). Esta ecuación de modelado de transporte es después añadida al sistema de ecuaciones diferenciales parciales que hay que resolver para el problema en cuestión. Note que el parámetro de longitud,  $l$ , necesita ser especificado algebraicamente. En lo anterior,  $Pr_k = 1.0$  y  $C_D \approx 0.164$  si  $l$  es tomada como la longitud ordinaria de mezclado.

El modelado anterior para la ecuación de transporte de  $\bar{k}$  sólo es válida en el régimen completamente turbulento, es decir, lejos de cualquier efecto de pared de amortiguación. Para flujos típicos de pared, es decir, para  $y^+$  mayores que 30, aproximadamente. Condiciones de contorno internas para las ecuaciones de  $\bar{k}$  se suministran a menudo a través del uso de funciones de pared [38].

Las funciones de pared están basadas en la aceptación de la ley de la pared como el enlace entre la velocidad cercana a la pared y el esfuerzo cortante de pared. La porción logarítmica de la ley de la pared sigue exactamente la hipótesis de mezcla de longitud de Prandtl y es confirmada por experimentos bajo una amplia gama de condiciones. En la ley de la región de pared, los experimentos también indican que la convección y difusión de  $\bar{k}$  son despreciables (insignificantes). Así la generación y disipación de  $\bar{k}$  están en balance, y se puede demostrar que si tomamos  $C_k = (C_D)^{3/2}$  en la ecuación de la viscosidad turbulenta (4.4), el modelo de energía cinética turbulenta para la viscosidad turbulenta se reduce a la

formulación de mezcla de longitud de Prandtl, misma que establece que:

$$\mu_T = \rho l^2 |\partial u / \partial y| \quad (4.9)$$

En la ubicación donde la difusión y la convección fueron primeramente despreciables, podemos establecer una condición de capa interior para  $\bar{k}$  en un flujo 2-D como:

$$\bar{k}(x, y_c) = \frac{\tau(y_c)}{\rho C_D^{2/3}} \quad (4.10)$$

donde  $y_0$  es un punto en la región donde la ley logarítmica de la pared se espera sea válida.

Otros modelos de una sola ecuación que se desvían un poco del patrón de Prandtl-Kolmogorov han sido sugeridos. Uno de los más exitosos de estos es el sugerido por Bradshaw et al. [39]. La ecuación de energía turbulenta se utiliza en el modelo de Bradshaw, pero el modelado es diferente en ambas, la ecuación de momentum, donde el esfuerzo cortante turbulento se supone como proporcional a  $\bar{k}$ , y en la ecuación de energía turbulenta. Los detalles no serán dados aquí, pero una característica interesante del método de Bradshaw es que, como consecuencia de la forma de modelado usado para los términos de transporte turbulento, el sistema de ecuaciones se hace hiperbólico y puede ser resuelto por un proceso similar al del método característico. El método de Bradshaw ha gozado de buen éxito en la predicción de capas límite de pared. Aun así, las predicciones no han sido notablemente superiores a los de los modelos algebraicos, los modelos de media ecuación (*one-half equation models*) u otros modelos de una ecuación (*one-equation models*).

No todos los modelos de una ecuación han sido basados en la ecuación de energía cinética turbulenta. Nee y Kovaszanay [40] y, más recientemente, Baldwin y Barth [41] y Spalart y Allmaras [42] han ideado ecuaciones de modelo para el transporte de la viscosidad turbulenta o un parámetro proporcional a la viscosidad turbulenta. Para ilustrar el enfoque, el modelo de Spalart y Allmaras se describe a continuación.

La viscosidad cinemática turbulenta de Spalart y Allmaras está dada por:

$$\nu_T = \tilde{\nu} f_{\nu 1} \quad (4.11)$$

El parámetro  $\tilde{\nu}$  se obtiene de la solución de la ecuación de transporte

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + c_{b1} (1 - f_{\nu 2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \quad (4.12)$$

donde los coeficientes y funciones de cierre están dados por

$$c_{b1} = 0.1355 \quad c_{b2} = 0.622 \quad c_{\nu 1} = 7.1 \quad \sigma = 2/3 \quad (4.13)$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + c_{b2})}{\sigma} \quad c_{w2} = 0.3 \quad c_{w3} = 2 \quad \kappa = 0.41 \quad (4.14)$$

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3} \quad f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}} \quad f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right) \quad (4.15)$$

$$g = r + c_{w2} (r^6 - r) \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad \tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{\nu 2} \quad (4.16)$$

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.17)$$

y  $d$  es la distancia a la superficie más cercana. Las correcciones para transición pueden ser encontradas en el trabajo de Spalart y Allmaras [42]. Una comparación del rendimiento de los modelos de Baldwin-Barth y Spalart Allmaras ha sido reportado por Mani et al. [43].

Rubesin [44] ha ampliado el modelo de una ecuación a flujo compresible y esto parece proporcionar una clara mejora respecto a los modelos algebraicos. Los modelos recientes

de una ecuación de (Baldwin-Barth y Spalart-Allmaras) han mostrado una mejor concordancia, con los datos experimentales para algunos flujos con separación, respecto a los resultados obtenidos con modelos algebraicos. En general, sin embargo, el rendimiento de la mayoría de los modelos de una ecuación (para ambos flujos incompresible y compresible) han sido decepcionantes, ya que en relativamente pocos casos se ha observado que estos modelos ofrecen una mejora sobre las predicciones de los modelos algebraicos.

## **4.3. Modelado con Dinámica de Fluidos Computacional**

### **4.3.1. Método de los Volúmenes Finitos**

El uso de los métodos numéricos para la solución de problemas de hidrodinámica y aerodinámica ha cobrado interés en años recientes; ha dejado de ser una herramienta en el área de la investigación y la academia para volverse una parte fundamental para el desarrollo de aplicaciones tecnológicas que demandan el conocimiento detallado de los procesos de transporte en los flujos. La mejora continua en la capacidad de los sistemas de cómputo vuelve cada día más accesible el uso de la dinámica de fluidos computacional (CFD) a especialistas de una amplia variedad de industrias que sin duda deben conocer, en la medida de lo posible, el sustento teórico de estas herramientas. La parte fundamental de la simulación computacional está ligada a la solución de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos, mismos que matemáticamente corresponden a sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales acopladas, por lo que el proceso necesario para la obtención de soluciones está muy lejos de ser algo trivial.

Ciertamente, los códigos de CFD que existen disponibles en la actualidad tienen la ventaja, en la mayoría de los casos, de contar con una interfaz gráfica cómoda para el usuario, además, ofrecen una amplia variedad de modelos y condiciones de frontera para la simulación de procesos termofluidodinámicos. Sin embargo, la parte fundamental

que se deja como responsabilidad al especialista sigue siendo el problema de definir las condiciones y los modelos matemáticos que consideren los efectos físicos que realmente gobiernan el desarrollo del fenómeno que se está estudiando. El uso óptimo de la dinámica de fluidos computacional no está basado en resolver necesariamente las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones en estado transitorio con modelos turbulentos complejos y con la consideración de que las propiedades termofísicas son variables. En realidad considerarlo así puede ser demasiado complicado de resolver, incluso para un equipo de cómputo robusto, con el riesgo de encontrar soluciones erróneas o no encontrarlas. Como podría esperarse, la mejor estrategia está basada en un análisis previo que considere los fundamentos de la mecánica de fluidos, mismo que sirve para sensibilizar al analista en los detalles del flujo, identificando así aspectos relevantes y particulares del estudio que se desarrolla.

El método de los volúmenes finitos representa el fundamento teórico del método numérico más ampliamente empleado en los análisis que involucran a la mecánica de fluidos y los fenómenos de transporte de calor y masa, además de la combustión. A través del conocimiento del método numérico es posible entender y dimensionar las bondades de los modelos tridimensionales que es posible trabajar en códigos comerciales robustos como el ANSYS-FLUENT, CFX, CD-ADAPCO, PHOENICS y el código libre OpenFOAM [53].

El estudio de los procesos termofluidodinámicos a través de la Dinámica de Fluidos Computacional CFD consiste en la solución mediante computadoras de modelos matemáticos complejos para la conservación de masa, la conservación de la cantidad de movimiento en las tres direcciones, la conservación de la energía, modelos de turbulencia, y en su caso modelos para combustión. Esto resulta en un grupo acoplado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales que sólo es posible resolver mediante cómputo robusto.

El análisis en CFD requiere dibujar en una computadora la región que se quiere estudiar, después, esta región se divide en pequeños volúmenes en los que se aplican las



ecuaciones de conservación de manera local. Entonces en cada uno de estos volúmenes se tienen al menos 6 ecuaciones, mismas que se deben resolver de manera simultánea para todos los volúmenes que se tengan en la región de estudio. Cuando se generan los volúmenes de control se identifican *nodos* que son puntos ubicados generalmente en el centro de cada uno de los volúmenes. A distancia, los volúmenes de control parecen definir una malla dentro de la zona de estudio; una malla típica en tres dimensiones suele tener más de 1,000,000 de volúmenes, por lo que la computadora tendrá que resolver aproximadamente 6,000,000 de ecuaciones simultáneas. En el caso de problemas transitorios por cada instante de tiempo hay que resolver la totalidad de ecuaciones. Un fenómeno transitorio no muy complicado se puede simular con algunos miles de instantes de tiempo. Entonces, el asunto de la simulación computacional ya no es algo simple.

Por las razones expuestas, las simulaciones computacionales están limitadas a estudios de regiones relativamente pequeñas y será necesario elegir con cuidado las zonas de interés. La información obtenida con el estudio de CFD es muy precisa cuando se eligen adecuadamente los modelos que la computadora ha de resolver. Por medio de simulación computacional se obtiene información muy detallada de los fenómenos, lo que permite tomar decisiones y mejorar diseños y procesos. Para hacer posible la simulación computacional la cantidad de volúmenes y pasos de tiempo involucrados no deben sobrepasar la capacidad de cálculo de las computadoras empleadas, y adicionalmente el proceso de simulación no debe ser demasiado lento para que sea práctico. Existe entonces la necesidad de simplificar en la medida de lo posible el proceso a estudiar, sin embargo, esto debe hacerse con cuidado para no simplificarlo en exceso de modo que se pierda información importante.

En nuestro caso de interés, la simulación computacional con CFD se realiza aplicando consideraciones que simplifican el estudio. Se pretende conocer las particularidades fenomenológicas para continuar el avance hacia la construcción de modelos más complejos que estén suficientemente sustentados con respaldo de resultados documentados formalmente

disponibles en la literatura especializada.

## CAPÍTULO

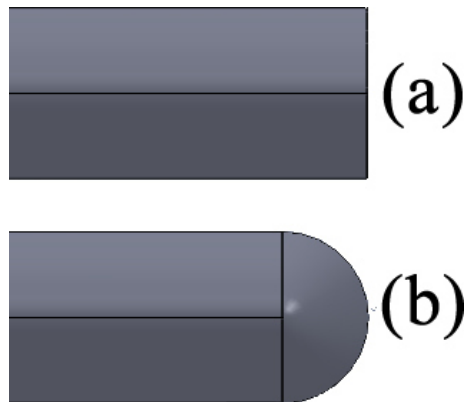
### 5

## METODOLOGÍA

### **5.1. Planteamiento del problema**

Para iniciar con la descripción del fenómeno a analizar, resultará necesario establecer con detalle las características del problema a abordar, con el objetivo de dejar en claro las suposiciones y condiciones con las que se desarrolla el fenómeno del vórtice. Entonces, es posible reducir adecuadamente las ecuaciones fundamentales y establecer las condiciones de frontera que definen a nuestro problema.

Con el objetivo de poder cuantificar la disipación de los vórtices de salida secundarios, a medida que cambia la forma geométrica de la punta del ala rectangular con perfil simétrico, se propusieron dos geometrías distintas, variando la forma de la punta del ala



**Figura 5.1:** Distinción en la punta de un ala rectangular NACA0012. (a) Punta rectangular, (b) Punta circular

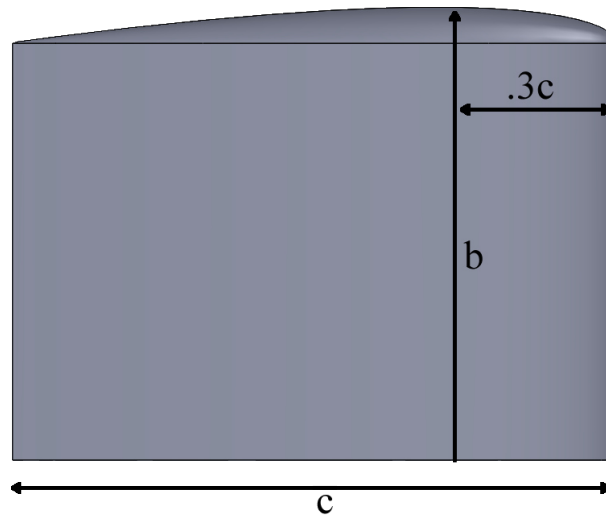
(rectangular y circular), como se ilustra en la figura 5.1.

Las dimensiones de las alas en estudio son mostradas en la figura 5.2, donde las alas son de sección simétrica con perfil aerodinámico NACA 0012 y cuentan con una cuerda de  $c = 1.2192$  m y una envergadura de  $b = 0.9144$  m.

### 5.1.1. Modelo Físico de Interés

Basándonos en los estudios computacionales realizados por Matthew J. el al. [17] enfocados en calcular el flujo del vórtice de salida en la punta del ala aerodinámica previamente medidos experimentalmente por Chow et al. [22], el dominio computacional debe reproducir a la del experimento tan estrechamente como sea posible. La geometría general utilizada en esta tesis se muestra en la figura 5.3, misma que consiste en un prisma rectangular que representa el campo de flujo que ocupa el volumen interno de la sección de pruebas del túnel de viento.

El marco de referencia consiste en un sistema de coordenadas cartesianas, respecto al borde de salida de la semi-ala. La semi-ala está acoplada en una de las paredes verticales del volumen de control, manteniendo  $\alpha = 10$  como ángulo de ataque. La sección del dominio computacional se extiende  $2.5 c$  adelante y  $3 c$  detrás del borde de salida de

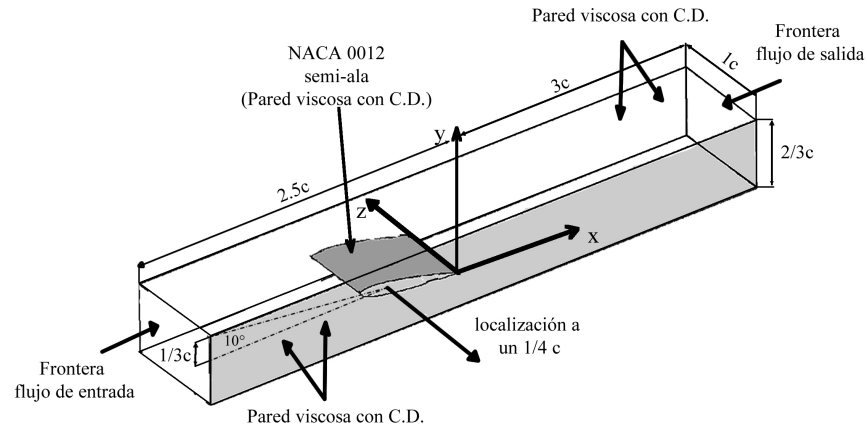


**Figura 5.2:** Dimensiones del ala aerodinámica, donde  $c=1.2192\text{m}$  y  $b=0.9144\text{m}$

la semi-ala, pero estas dimensiones no se ajustan a la longitud de la sección de prueba real reportado por Matthew J. el al. [17]. La inclinación en la dirección de la corriente libre del dominio computacional es mayor que el de Chow et al. [22], las cuales fueron realizadas para asegurar que la solución computacional es libre de efectos de frontera y la comparación con el experimento puede ser posible.

### 5.1.2. Condiciones de Frontera

Los valores especificados en la simulación en ANSYS FLUENT, fueron realizadas con un número de Reynolds, velocidad relativa, densidad y viscosidad dinámica a  $Re = 4.6 \times 10^6$ ,  $47.8 \text{ m/s}$ ,  $1.32 \text{ kg/m}^3$  y  $1.6750185 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , respectivamente. Las condiciones de frontera de flujo de entrada se establecen de acuerdo a los valores especificados por Matthew J. el al. [17], en el cual especifica, el número de Mach, la presión estática, y la temperatura ajustados a  $0.14027$ ,  $109694.21 \text{ Pa}$ , y  $289.473 \text{ K}$  inicialmente, y se mantienen constantes. Esto permite que las condiciones de referencia computacional sean las mismas que los resultados experimentales realizados por Chow et al. [22] cuando se logra



**Figura 5.3:** Vista general del dominio geométrico utilizado en el cómputo. Nota: C.D. (Condición de no deslizamiento)

la convergencia.

Los límites exteriores se encuentran en las paredes del túnel de viento y la superficie del ala, y son especificados como paredes viscosas en el que se cumplen las condiciones de no deslizamiento ( $\vec{U} = 0$ ).

En este caso, es conveniente especificar los valores uniformes de la cantidad de la turbulencia en la entrada. Se estimó la viscosidad turbulenta modificada, la intensidad de turbulencia  $I$  y la escala de longitud turbulenta  $\tilde{\nu}$ , para los modelos de turbulencia: Spalart-Allmaras y Shear Stress Transport.

Se obtuvo la viscosidad turbulenta modificada,  $\tilde{\nu}$ , haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$\tilde{\nu} = \sqrt{\frac{3}{2}} u_{avg} I \ell \quad (5.1)$$

donde  $I$  es la intensidad de turbulencia, definida como la relación de la raíz cuadrática media de las fluctuaciones,  $u'$ , y la velocidad media,  $u_{avg}$ :

$$I \equiv \frac{u'}{u_{avg}} = 0.16 (Re_L)^{-1/8} \quad (5.2)$$

donde  $Re_L$  es el Número de Reynolds relativo al diámetro hidráulico. Una intensidad de la turbulencia de 1 % o menos se considera en general una baja intensidad y turbulencia superiores al 10 % se considera alto. En este caso, la intensidad de turbulencia debe cumplir con las características del túnel a simular.

La escala de longitud de turbulencia, es una cantidad física relacionada con el tamaño de los remolinos grandes que contienen la energía en flujos turbulentos. La escala de longitud de turbulencia está restringida por el tamaño del túnel de viento a simular, ya que los remolinos turbulentos no pueden ser más grandes que el túnel de viento. La siguiente ecuación relaciona la escala de longitud de turbulencia y la dimensión relativa del túnel de viento:

$$\ell = 0.07L \quad (5.3)$$

donde  $L$  es el diámetro hidráulico del túnel de viento.

## 5.2. Discretización del Dominio Geométrico

Una vez que se tiene la geometría del dominio hay que realizar la discretización de éste. Para ello hay que tomar en cuenta otras consideraciones. Esta parte del proceso es esencial ya que los resultados que se obtengan pudieran ser más sensibles a las características de la malla (discretización del dominio) que al modelo de turbulencia utilizado.

Para resolver las ecuaciones de gobierno discretizadas es necesario que los cálculos se realicen sobre una colección de puntos discretos o nodos. La determinación de una malla apropiada para resolver el flujo alrededor o a través de alguna forma geométrica es un problema serio, uno que bajo ninguna circunstancia es trivial. El problema de generación

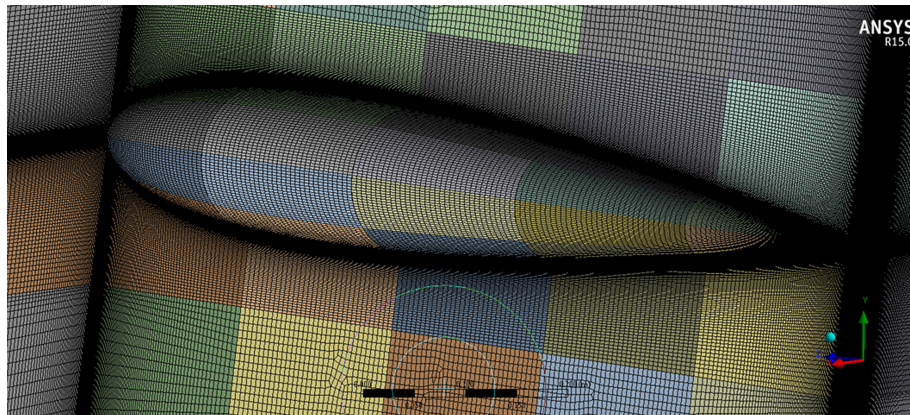
de malla es una consideración muy importante en la dinámica de fluidos computacional ya que el tipo de malla que se elija para un cierto problema definirá la solución numérica.

Después de experimentar con diferentes topologías de discretización del dominio, las mallas para los dos dominios geométricos computacionales se construyeron a partir de elementos con formas de hexaedros, los cuales se adaptan bien a las formas ortogonal y circular del dominio geométrico. La discretización del dominio geométrico en el extremo del ala para el caso del ala con punta circular se ilustra en la figura 5.4. La malla adopta una función de tamaño apropiado con una cantidad neta de 16,332,327 elementos, distribuida en su interior con 105 planos paralelos y transversales al eje Z, 128 planos paralelos y transversales al eje Y, con 50 planos paralelos y transversales al eje X corriente arriba desde el borde de ataque del ala, y 150 planos paralelos y transversales al eje X corriente abajo desde el borde de salida del ala. En la zona cercana al perfil aerodinámico se construyó a partir de elementos hexaédricos, conteniendo 305 puntos de división de elementos sobre la superficie del extradós y 305 puntos sobre la superficie del intradós. Con el fin de agrupar una mayor cantidad de elementos en la región cercana al borde de salida y el borde de ataque del perfil aerodinámico, se agrupó una división de 200 elementos sobre la línea del extradós e intradós del perfil aerodinámico para  $x/c \in [-1, -0.75]$  y una división de 200 elementos para  $x/c \in [-0.25, 0]$ , con un factor de *Bias* de 20 en dirección a LE y TE.

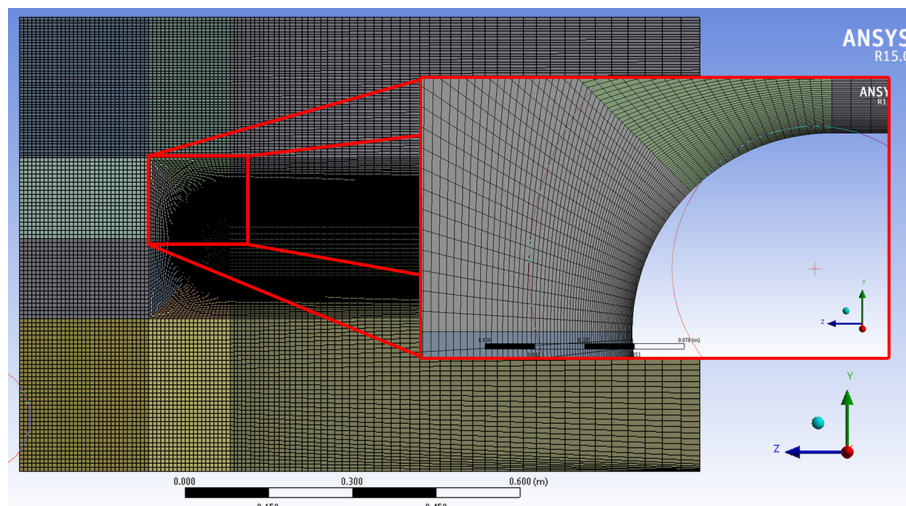
La línea de curvatura de la punta a lo largo de la cuerda de cada una de las alas está dividido a partir de 80 elementos (como puede observarse en la figura 5.5). Las dos mallas exponen un  $y^+ \sim 20.6$  sobre la superficie del perfil aerodinámico, donde  $y^+ = d(\tau_w/\rho_w)^{1/2}/\nu_w$ ,  $d$  es la distancia normal a la superficie,  $\rho_w$  es la densidad,  $\tau_w$  es el esfuerzo cortante, y el subíndice  $w$  se refiere al valor en la superficie.

Como es posible observar en la figura 5.6, para el estudio de la aerodinámica del vórtice de salida, es necesario incrementar la densidad de nodos en la región cercana a la punta del ala, mismo que se construyó a partir de elementos con forma de hexaedros, conteniendo  $250 \times 75 \times 75$  puntos de división de elementos sobre las aristas de la geometría.



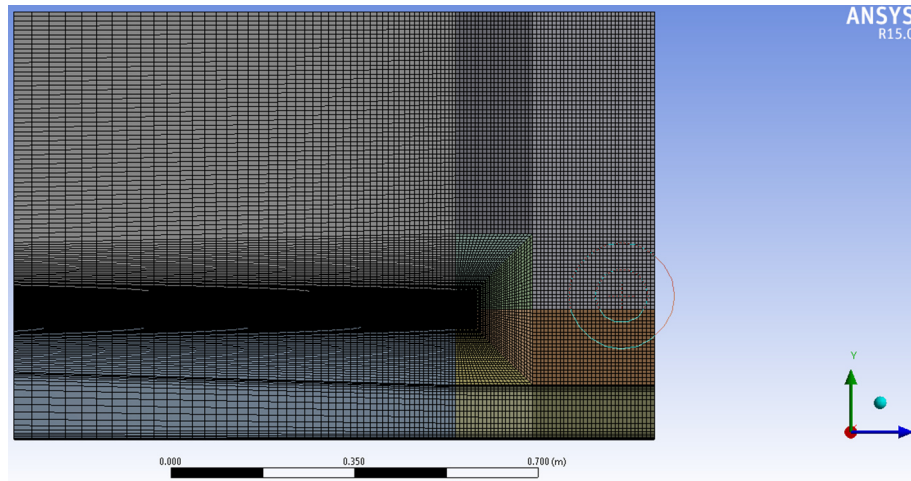


**Figura 5.4:** Vista general del dominio discretizado a través de la sección del perfil



**Figura 5.5:** Vista general del dominio discretizado en el extremo del ala con punta circular

El parámetro para estimar la calidad del dominio de discretizado parte del concepto de oblicuidad (Skewness por su nombre en inglés). La oblicuidad se mide de 0 a 1, siendo 0 un elemento equilátero y 1 un elemento completamente torcido. Los elementos confiables para el cálculo van de 0 a 0.9, arriba de este último valor, las mediciones locales de las propiedades escalares pueden diferir de la realidad. La ecuación para el cálculo de la calidad oblicuidad, es la siguiente:



**Figura 5.6:** Vista general del dominio discretizado en un plano transversal corriente abajo

$$Skewness = \frac{T_{oe} - T_r}{T_{oe}} \quad (5.4)$$

donde  $T_{oe}$  es el tamaño óptimo del elemento y  $T_r$  es el tamaño real del elemento evaluado.

La medida de oblicuidad de los dos dominios discretizados se muestra en la tabla 5.1:

Geometría	Tipo de Elemento (con skewness)	Cantidad
Circular	Hexaédricos $> 0.9$	490
Rectangular	$0.88 < \text{Hexaédricos} < 0.9$	590

**Tabla 5.1:** Medida de oblicuidad de los elementos del dominio geométrico

En el caso del dominio discretizado de la geometría del ala con extremo circular se mejoró hasta obtener un valor skewness promedio de 0.14, y para el caso con geometría rectangular, su valor skewness promedio es de 0.12, los cuales son considerados aconsejables para obtener excelentes resultados en las simulaciones.

## CAPÍTULO

### 6

## RESULTADOS

En este capítulo se discuten los resultados numéricos de la aerodinámica del vórtice de salida para diferentes excentricidades en la redondez del espesor de la punta de un ala recta.

Se empleó la herramienta ANSYS FLUENT para la solución de las ecuaciones promediadas de Reynolds para el flujo turbulento y se empleó los modelos de turbulencia Spalart-Allmaras y SST. Se estudian dos casos importantes, el proceso de formación del vórtice de salida en la región cercana a la superficie de la punta del ala ( $x/c < 0$ ) y la evolución del enrollamiento del vórtice de salida corriente abajo desde el borde de salida ( $x/c > 0$ ), para condiciones de velocidad correspondiente a 47.8 m/s, considerando propiedades termofísicas del aire a presión y temperatura constantes y condiciones normales.

En las circunstancias antes mencionadas, el número de Reynolds es  $Re = 4.6 \times 10^6$ , donde  $Re$  está basado en la cuerda geométrica  $c = 1.2192$  m. El análisis se llevó a cabo para un ángulo de ataque  $\alpha = 10$ . Se analizan de forma particular la velocidad axial, la componente axial de la vorticidad, la distribución de la presión estática para los diferentes tipos de alas. Posteriormente, se presentan los resultados de los esfuerzos de Reynolds, la energía cinética turbulenta y la disipación de la energía cinética turbulenta del vórtice de salida.

Se define  $\vec{U}$  como el vector de la velocidad resultante, donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las componentes de la velocidad resultante en las direcciones  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ .

La vorticidad  $\vec{\omega}$  es el campo vectorial definido como el rotacional del campo de velocidades:

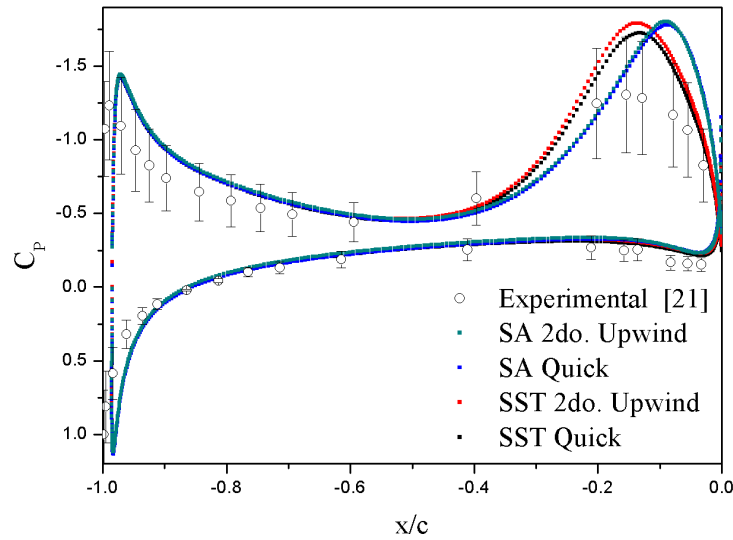
$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{U} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (6.1)$$

donde  $\omega_x = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ ,  $\omega_y = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ , y  $\omega_z = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

## 6.1. Precisión de los modelos de turbulencia

Para este estudio se revisó la veracidad de los modelos de turbulencia Spalart-Allmaras (SA) y SST (Shear Stress Transport) utilizando dos distintos esquemas: Quick y Upwind de segundo orden. Se caracterizó el decaimiento del coeficiente de presión estática en el núcleo del vórtice de salida a lo largo de la trayectoria axial del vórtice. Estos resultados fueron comparados con estudios experimentales [22] y numéricos [17] realizados para un ala rectangular de extremo circular, con el objetivo de cuantificar el error obtenido por el uso de ambos modelos y esquemas.

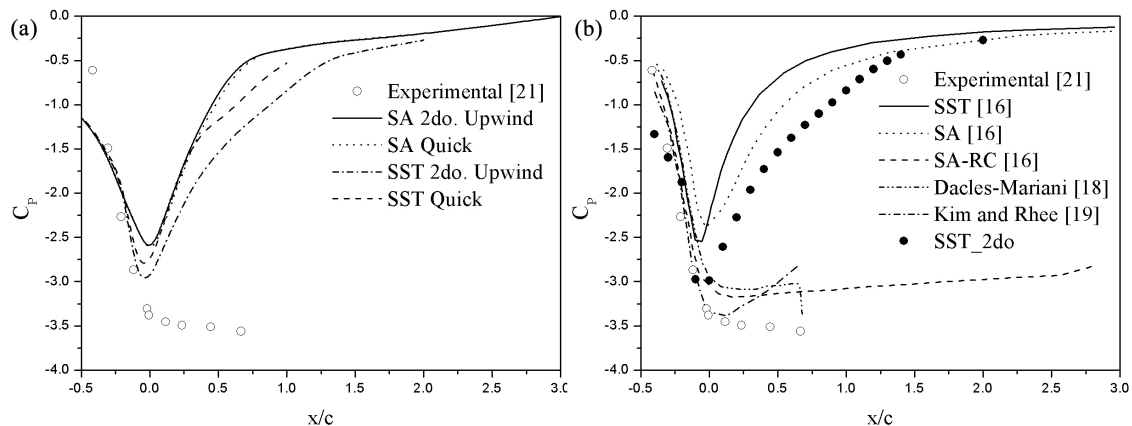
La solución del desarrollo de la capa límite sobre la superficie del ala es importante dado que produce la vorticidad necesaria para la formación y el crecimiento del vórtice de salida en el extremo del ala. Este crecimiento produce un incremento en la velocidad transversal del flujo, desarrollando un decaimiento en la presión estática en el centro del



**Figura 6.1:** Perfiles del coeficiente de presión ( $C_p$ ) de diferentes modelos de turbulencia y datos experimentales [22], sobre la superficie del ala en  $z = 0.889b$ .

vórtice, y esto a su vez hace que la velocidad axial en el centro del vórtice se intensifique. Los perfiles del coeficiente de presión estática  $C_p$  sobre la superficie del ala y corriente abajo son mostrados en las figuras 6.1 y 6.2; donde  $C_p = (P_e - P_{e,ref}) / 0.5\rho_{ref}U^2$  y el subíndice  $ref$  se refiere a las condiciones en el lugar de referencia experimental en  $x = -1.1344c$ ,  $y = 0.3423c$ , y  $z = 1.0492b$ .

En la figura 6.1 se observa la comparación del decaimiento del coeficiente de presión estática de los modelos de turbulencia SA y SST con respecto a los resultados experimentales publicados. Los resultados obtenidos para los cuatro casos distintos muestran un error menor al 5 % en el extradós del ala. Sin embargo, en la superficie del intradós el error es relativo, dentro del dominio acotado por  $x/c = 0$  (borde de salida) y  $x/c = -0.4$ , los dos modelos de turbulencia no presentan una solución aceptable con un error relativo de aproximadamente un 20-30 %, para  $x/c = -0.4$ ; a  $x/c = -0.6$  ambos modelos muestran resultados aceptables, dentro de un 5 %. En los modelos SST y SA en el dominio acotado



**Figura 6.2:** Perfiles del coeficiente de presión ( $C_p$ ) sobre la superficie del ala en  $z=0.889b$ . (a) Comparativa de los datos experimentales [22] y los modelos de turbulencia Spallart-Allmaras y SST. (b) Comparativa de los datos experimentales [22] y resultados publicados por Matthew J. el al. [17]. Donde SST\_2do son los resultados obtenidos en esta investigación.

entre  $x/c=-0.6$  y  $x/c=-1$  (Borde de ataque), el error se incrementa hasta un  $\sim 30\%$ .

En la figura 6.2 se muestran dos gráficas del decaimiento del coeficiente de presión estática en el núcleo del vórtice en función de la dirección axial. En la figura 6.2a se ilustra la comparación entre cuatro casos distintos: El modelo de turbulencia SA con esquema numérico de Upwind de segundo orden, SA - QUICK, SST - 2do. Orden Upwind, y SST - QUICK. Los cuatro casos predicen un decaimiento del coeficiente de presión estática dentro del dominio  $-0.5 < x/c < 0$ , similar a los publicados en los resultados experimentales. Corriente abajo, la precisión calculada por los diversos casos difieren una de otra. Los resultados obtenidos mediante el modelo de turbulencia Spalart - Allmaras y los dos distintos esquemas: QUICK y 2do. Orden Upwind no presentan diferencias entre ellas, ambos casos predicen una disminución del coeficiente de presión estática a un mínimo de  $C_p \approx -2.5$  en  $x/c = 0$ . Posteriormente  $C_p$  aumenta rápidamente, y más allá de  $x/c = 0$  el  $C_p$  se aproxima asintóticamente a  $C_p = 0$ .

Utilizar un modelo de turbulencia de dos ecuaciones, exhibe menor presión mínima que los modelos de turbulencia de una sola ecuación. En caso del modelo de turbulencia

SST, utilizando el esquema numérico QUICK presenta la misma tendencia que los demás modelos, mostrando un decaimiento hasta  $C_p \approx -2.75$ , e incrementa rápidamente. El modelo SST - 2do. Upwind presenta un coeficiente de presión estática mínimo de  $C_p \approx -2.9$  en  $x/c = 0$  y posteriormente se intensifica.

En la figura 6.2b se muestran los resultados comparativos de varias investigaciones y la simulación realizada con el modelo de turbulencia SST y el esquema numérico Upwind de Segundo Orden. Matthew J. et al. [17] argumenta que el SA-RC predice una disminución de la presión estática a un mínimo de  $C_p = -3.3$ , que es un 9.4 % más alto que el valor experimental. Después, el  $C_p$  es casi constante en el dominio comprendido entre  $0.2 < x/c < 2.7$ , sólo con un pequeño aumento de 0.3 unidades. Aunque la presión del núcleo en el caso experimental parece estabilizarse alrededor de un valor inferior de  $C_p < -3.6$ , el comportamiento del modelo SA-RC es similar al del experimento en el campo cercano. Los resultados de Dacles-Mariani et al. [18] sobre la presión estática son muy similares a los resultados experimentales. Ellos utilizan un modelo de turbulencia SA-RC con una corrección de rotación simple, imponiendo los datos experimentales como su condición frontera de salida.

Una posible explicación sobre la solución imprecisa del coeficiente de la presión estática en el núcleo del vórtice es la siguiente: típicamente, un modelo de turbulencia de una ecuación es una representación altamente inexacta de los esfuerzos de Reynolds normales ( $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$ ). Estos términos regularmente son negativos (no físicamente), ya que deben resumirse a cero en flujos incompresibles. En un modelo de turbulencia de dos ecuaciones, el término  $2\bar{k}/3$  es considerado a cada uno de los esfuerzos normales. El efecto de la ecuación de momentum es que la presión se reduce por  $2\bar{k}/3$  y la velocidad no se ve afectada en absoluto. Por lo tanto, para los modelos de turbulencia de una ecuación, se espera que la presión sea demasiada alta en algunas regiones a pesar que la velocidad sea exacta [52]. Como se mencionó anteriormente, los resultados experimentales indican que las mediciones del tensor de esfuerzos de Reynolds no es directamente proporcional al

rango de la velocidad media de deformación. Este importante descubrimiento implica que una aproximación de la viscosidad turbulenta (constante o isotrópica), es probable que no presente con éxito la solución del flujo del vórtice de salida.

## 6.2. Resultados Wingtip Circular

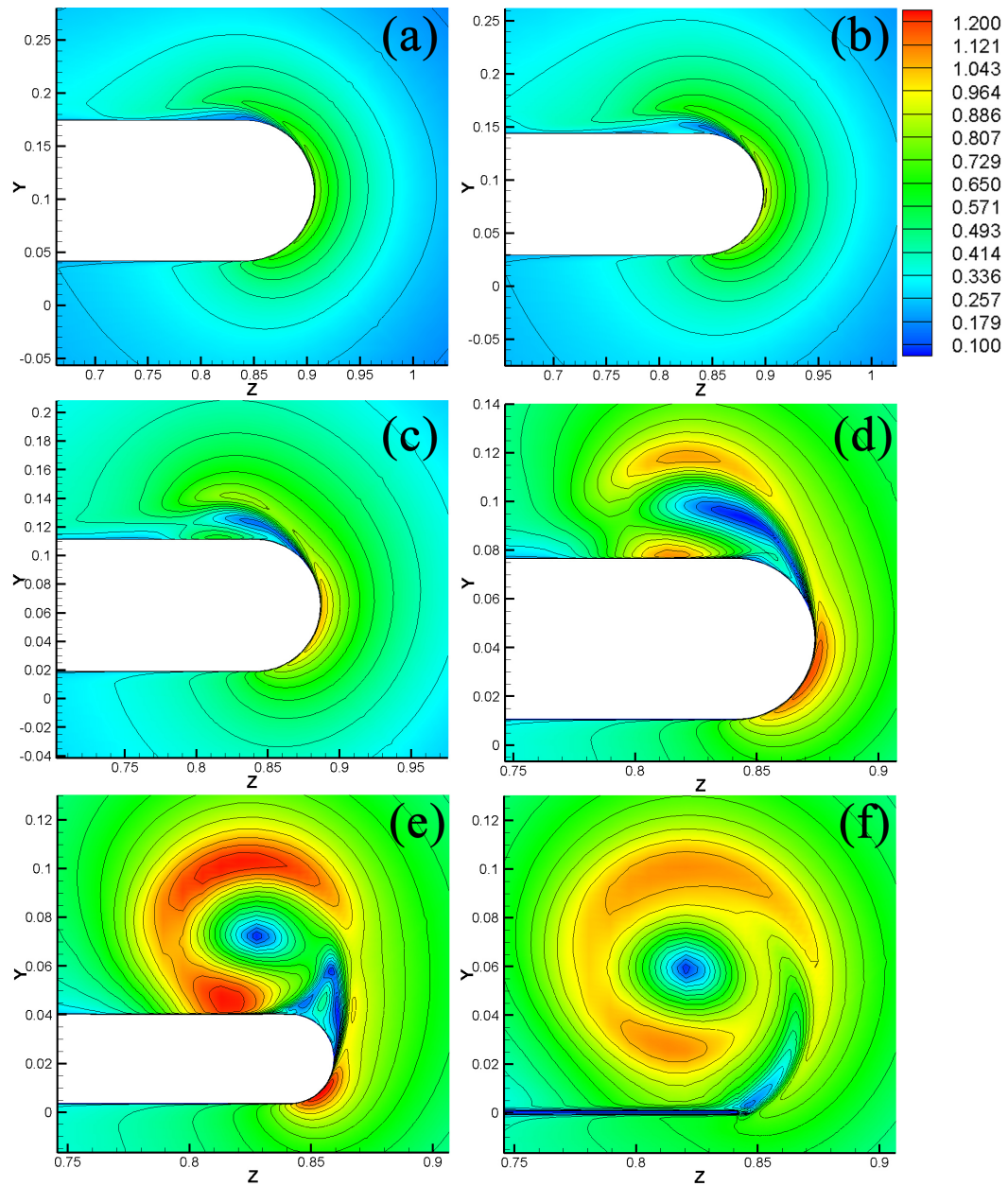
### 6.2.1. Velocidad del flujo transversal

A continuación se analiza a la evolución del vórtice de salida desarrollado en el extremo del ala de punta circular. La velocidad del flujo transversal,  $U_{y,z}$ , se define como el vector resultante de las componentes  $v$  y  $w$  del vector de velocidad:  $\sqrt{v^2 + w^2}$ . La figura 6.3 muestra los contornos de la velocidad del flujo transversal normalizada con la velocidad de la corriente libre  $U_{y,z}/U_\infty$  para distintos planos: (a)  $x/c = -5/10$ , (b)  $x/c = -4/10$ , (c)  $x/c = -3/10$ , (d)  $x/c = -2/10$ , (e)  $x/c = -1/10$  y (f)  $x/c = 0$ .

En la región implícita entre el dominio:  $-1 < x/c < -5/10$  (región acotada entre el LE y el 50 % de la cuerda aerodinámica), el vórtice de salida no es evidente, debido a que el gradiente de presión adverso no es lo suficientemente intenso y el radio de curvatura en el extremo del ala no es lo suficientemente pequeño para inducir la separación del flujo trasversal sobre la superficie del ala. Cuando el viento relativo proveniente desde el borde de ataque atraviesa por los planos  $x/c = -5/10$  y  $x/c = -4/10$ , el flujo transversal se desprende de la superficie de succión induciendo el desarrollo de la etapa inicial del vórtice de salida. A partir de  $x/c = -3/10$ , el flujo proveniente de la superficie de presión (intradós), con velocidad  $U_{y,z}/U_\infty \approx 1.043$  comienza a enrollarse, generando una zona de baja velocidad.

A medida que el flujo se desplaza corriente abajo a lo largo de la cuerda geométrica, la zona de alta velocidad comienza a intensificarse (tanto en área como magnitud) desde la superficie de presión hasta la superficie de succión (esto se puede ver más claramente





**Figura 6.3:** Contorno de la componente de la velocidad transversal normalizada con respecto a la velocidad de la corriente libre  $U_{yz}/U_{\infty}$ , para los planos (a)  $x/c = -5/10$ , (b)  $x/c = -4/10$ , (c)  $x/c = -3/10$ , (d)  $x/c = -2/10$ , (e)  $x/c = -1/10$ , (f)  $x/c = 0$ .

en la figura 6.3c). La velocidad transversal del vórtice de salida incrementa rápidamente, alcanzando una velocidad transversal máxima de  $U_{y,z}/U_\infty \approx 1.2$  en el plano  $x/c = -2/10$  (ver figura 6.3e). Posteriormente, la velocidad transversal decae lentamente a un nivel de  $U_{y,z}/U_\infty \approx 1.043$  en el borde de salida ( $x/c = 0$ ).

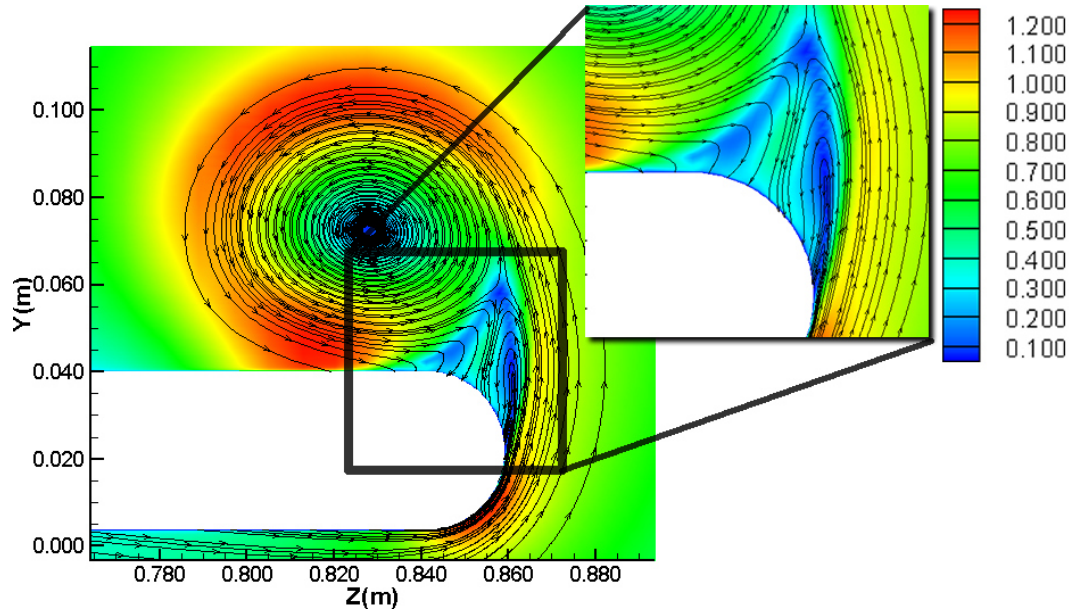
El radio del núcleo del vórtice de salida,  $r_{core}$ , se estimó como la distancia entre el punto donde la velocidad transversal es mínima y el punto donde la velocidad del flujo transversal es máxima. A partir de  $x/c = -1/10$ , el radio del núcleo es aproximadamente  $r_{core} = 0.025c$  y crece constantemente hasta un  $r_{core} = 0.049c$  en  $x/c = 0$ .

Para identificar los vórtices primario y secundario, se ilustran las líneas de corriente sobre los planos. Desafortunadamente, en la literatura los datos experimentales son únicamente presentados en planos transversales a la dirección axial del flujo, por lo que no es factible poder comparar los resultados numéricos relacionados a los vórtices secundarios.

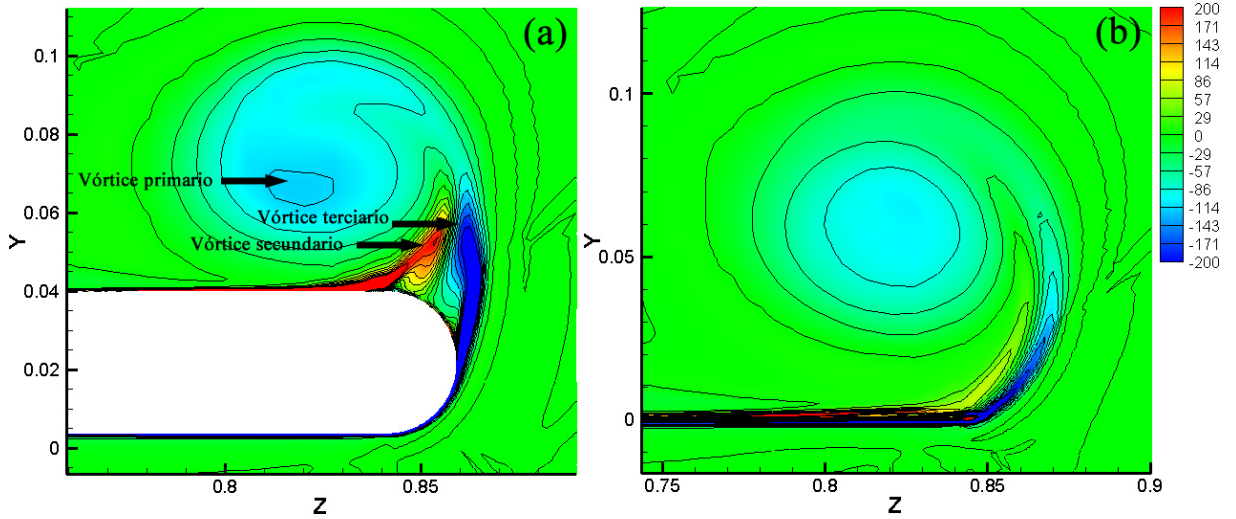
En la figura 6.4 se ilustran las líneas de corriente y los contornos de la velocidad transversal. Es notable la presencia de dos vórtices más pequeños que el vórtice primario, los cuales son identificados como zonas de baja velocidad del flujo transversal (ver  $U_{y,z}/U_\infty \approx 0.1$ ), los cuales rotan en dirección a favor y en contra al vórtice primario. La reducción en el espesor del ala y el incremento del vórtice primario empuja los vórtices secundarios fuera de la superficie del ala. Finalmente, en  $x/c = 0$ , los vórtices secundarios no están limitados por la superficie, pero son arrastrados alrededor del vórtice primario debido al flujo procedente de la superficie de presión y al enrollamiento del flujo en la superficie de succión.

### 6.2.2. Componente Axial de la Vorticidad

La figura 6.5 muestra los contornos de la componente axial de la vorticidad,  $\omega_x$ , en el desarrollo del vórtice de salida en los planos transversales a la dirección axial  $x/c = -1/10$  y  $x/c = 0$ . En el plano  $x/c = -1/10$  es posible apreciar una zona de vorticidad



**Figura 6.4:** Presencia de los vórtices secundarios. Contorno de la componente de la velocidad transversal normalizada con respecto a la velocidad de la corriente libre  $U_{yz}/U_{\infty}$  y líneas de corriente en el plano  $x/c = -1/10$ .



**Figura 6.5:** Contorno de la componente axial de la vorticidad  $c\omega_x/U_{\infty}$ , para los planos (a)  $x/c = -1/10$ , (b)  $x/c = 0$ .

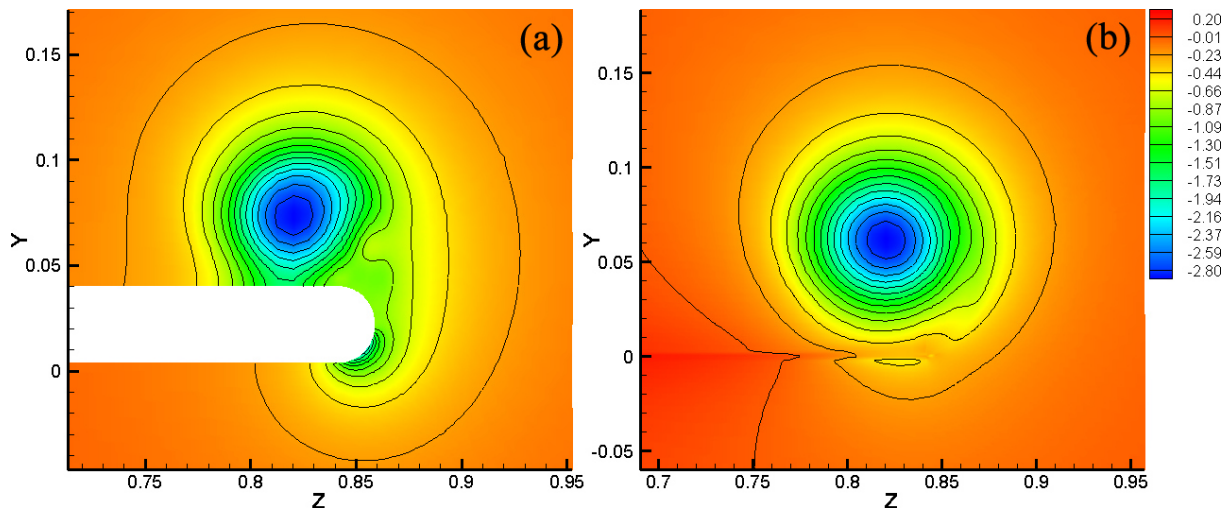
$c\omega_x/U_\infty \approx -86$  conocida como vórtice primario, la rotación de los elementos de fluido del vórtice primario es impulsada por el flujo proveniente de la superficie de presión hacia la superficie de succión. Además, se aprecian dos zonas de alta vorticidad, conocidas en la literatura como vórtice secundario y vórtice terciario [14], ambos de menor tamaño respecto al vórtice primario. Los elementos de fluido acoplados al vórtice secundario rotan en dirección contraria al vórtice primario, con vorticidad  $c\omega_x/U_\infty \approx -200$ . Los elementos del fluido que forman el vórtice terciario están ubicados entre el vórtice secundario y el flujo proveniente de la superficie de presión. Una particularidad del vórtice terciario es la rotación en la dirección del vórtice primario pero con mayor vorticidad  $c\omega_x/U_\infty \approx 200$ . Ambos vórtices secundario y terciario se van disipando corriente abajo y son acoplados al vórtice primario. En el plano  $x/c = 0$  comienza la generación del vórtice dominante, donde el vórtice de salida se compone de un pequeño núcleo viscoso con  $r_{core} \approx 0.049c$ , donde el centro del núcleo se define como el punto donde la componente axial de la vorticidad es máxima.

### 6.2.3. Coeficiente de Presión Estática

**Jim S. Chow et al.** [23] argumenta que los gradientes radiales en un flujo incompresible, axisimétrico y estacionario (n-ecuación de Euler), la ecuación de transporte de cantidad de movimiento donde los gradientes axiales son de menor magnitud que puede expresarse de la manera siguiente:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{V_\theta^2}{r} \quad (6.2)$$

La ecuación (6.2) da una explicación aproximada de la disminución de la presión estática en el núcleo del vórtice de salida a medida que se enrolla en la superficie de succión, y esto a su vez hace que la velocidad axial en el centro del núcleo se intensifique. A medida que la máxima velocidad del flujo transversal se incrementa con  $x/c$ , el gradiente de presión axial también desarrolla y acelera al flujo en el núcleo del vórtice de salida



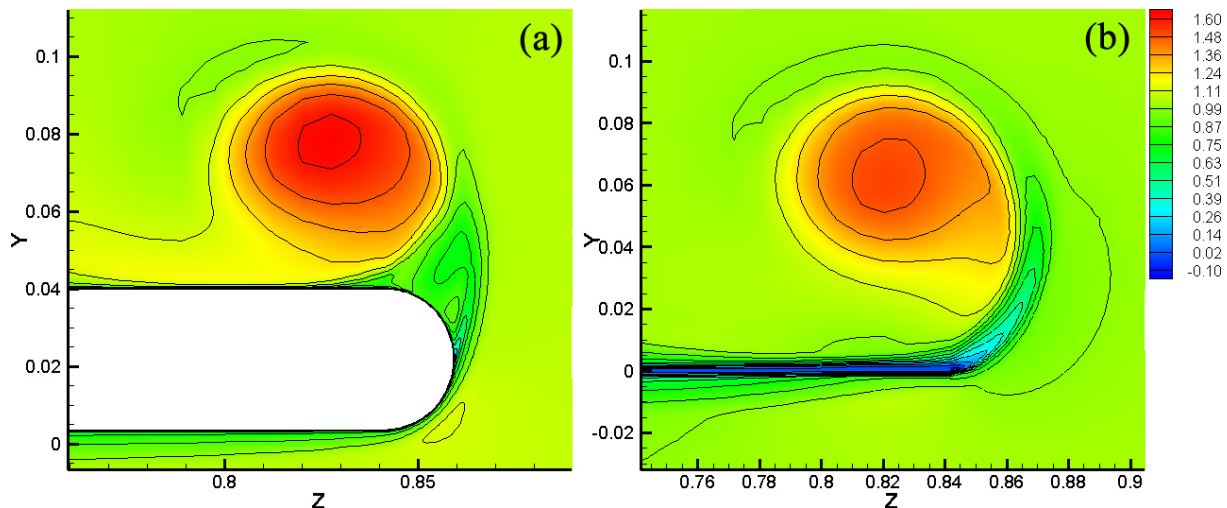
**Figura 6.6:** Contorno del coeficiente de presión  $C_p$ , para los planos (a) $x/c = -1/10$ , (b) $x/c = 0$ .

en la dirección axial.

Definimos el coeficiente de presión estática de referencia normalizada con la presión dinámica del flujo libre como  $C_p = (P_e - P_{e,ref}) / 0.5\rho_{ref}U_\infty^2$ . La figura 6.6 ilustra los contornos de  $C_p$  en los planos  $x/c = -1/10$  y  $x/c = 0$ . La presión estática disminuye radialmente a medida que nos acercamos al centro del núcleo del vórtice de salida. El valor mínimo de coeficiente de presión estática es de  $C_p = -2.98$  en el plano  $x/c = -1/10$ , y disminuye a  $C_p = -2.99$  en el plano  $x/c = 0$ .

#### 6.2.4. Velocidad Axial

Los contornos de la velocidad axial normalizada con la velocidad de la corriente libre  $U_a/U_\infty$  se muestran en la figura 6.7 para dos distintos planos transversales al flujo,  $x/c = -1/10$  y  $x/c = 0$ . Los resultados muestran un desarrollo excesivo en la velocidad axial en la región del núcleo del vórtice. En otras palabras, la velocidad axial presenta una distribución tipo chorro (*jetlike*) en el núcleo del vórtice debido a la existencia de un elevado gradiente de presión axial favorable. Lee et al. [16] observaron un campo de flujo similar y concluyeron que siempre se forma una distribución *jetlike* en el núcleo del



**Figura 6.7:** Contorno de la componente axial de la velocidad  $U_a/U_\infty$ , para los planos (a)  $x/c = -1/10$ , (b)  $x/c = 0$ .

vórtice. Ellos describen que el proceso es fuertemente dominado por las interacciones del vórtice con el ala y el flujo del entorno, por lo tanto, es siempre función de varios parámetros (i.e. la geometría de la punta, la estructura de múltiples vórtices, la envergadura del ala, el ángulo de ataque, la circulación, y las propiedades de la capa límite). La velocidad axial se incrementa radialmente a medida que nos acercamos al núcleo del vórtice, alcanzando una velocidad axial máxima de  $U_a/U_\infty \approx 1.62$ . En el borde de salida ( $x/c = 0$ ), la velocidad axial en el núcleo del vórtice disminuye ligeramente,  $U_a/U_\infty \approx 1.51$ .

La velocidad axial en el núcleo del vórtice se incrementa con  $x/c$  a lo largo de la cuerda geométrica, y disminuye posterior al borde de salida del ala.

### 6.2.5. Propiedades de la Turbulencia

El modelo de turbulencia de dos ecuaciones SST (Shear Stress Transport) consiste en la combinación del modelo de turbulencia  $k - \epsilon$  en la corriente libre y el modelo de turbulencia  $k - \omega$  cerca de la pared. El tensor de esfuerzos de Reynolds se calcula a partir de la aproximación de Boussinesq:

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} - 2\nu_t \left( S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (6.3)$$

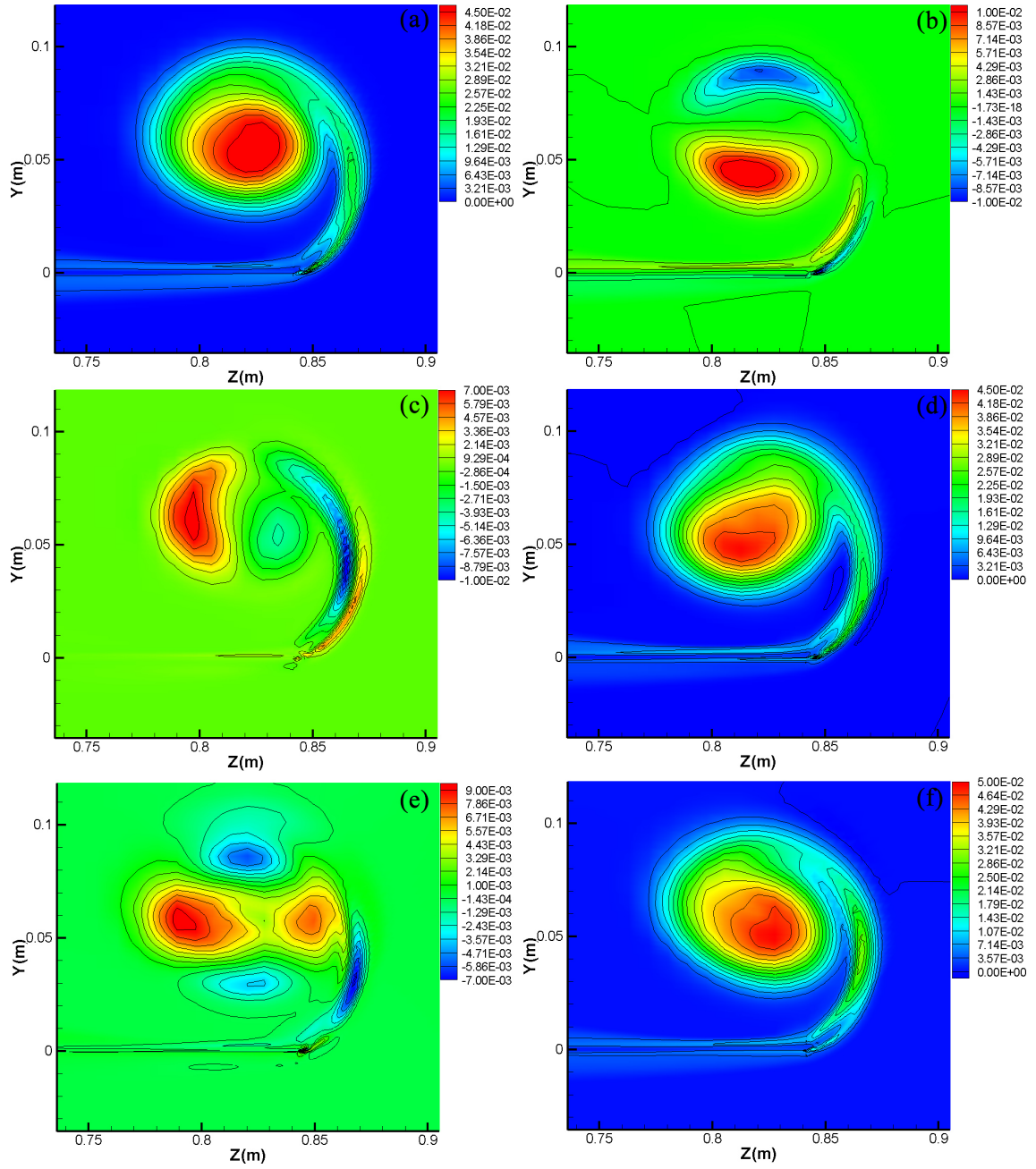
donde  $\overline{u'_i u'_j}$  es el tensor de esfuerzos de Reynolds,  $\bar{k}$  es la energía cinética turbulenta,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\nu_t$  es la viscosidad cinética turbulenta calculada a partir de  $k$  y  $\omega$ ,  $S_{ij}$  es el tensor medio de deformación, y  $i$  y  $j$  se refieren a las direcciones del sistema de coordenadas.

Con referencia al plano cartesiano, los contornos de los esfuerzos de Reynolds normales y cortantes se ilustran en planos transversales a la dirección axial. La figura 6.8 muestra la distribución de las componentes de los esfuerzos de Reynolds normalizados con el cuadrado de la velocidad de corriente libre en el plano  $x/c = 0$ , para (a)  $\overline{u'^2}/U_\infty^2$ , (b)  $\overline{u'v'}/U_\infty^2$ , (c)  $\overline{u'w'}/U_\infty^2$ , (d)  $\overline{v'^2}/U_\infty^2$ , (e)  $\overline{v'w'}/U_\infty^2$ , (f)  $\overline{w'^2}/U_\infty^2$ .

En la zona del núcleo del vórtice de salida, las componentes de los esfuerzos normales  $\overline{u'^2}/U_\infty^2$ ,  $\overline{v'^2}/U_\infty^2$  y  $\overline{w'^2}/U_\infty^2$ , muestran una distribución radial con valor máximo en el centro del vórtice, y disminuyendo a medida que nos alejamos del centro. En las componentes  $\overline{u'v'}/U_\infty^2$  y  $\overline{u'w'}/U_\infty^2$  se presentan dos regiones simétricas de signos opuestos (+ y -). Cualitativamente, los contornos de la componente de esfuerzo  $\overline{v'w'}/U_\infty^2$  en el plano  $x/c = 0$  presenta un patrón de un trébol de cuatro hojas, con cambios de signo alternados entre cada par contiguo de hojas. Los contornos del patrón del esfuerzo cortante  $\overline{v'w'}/U_\infty^2$  presenta dos regiones con niveles positivos alineados aproximadamente 0 respecto al eje X y alcanzando un valor máximo de  $\overline{v'^2}/U_\infty^2 \approx 9 \times 10^{-3}$ . Además, se ilustran dos regiones con niveles negativos alineados aproximadamente 90 con respecto al eje X y con un valor mínimo de  $\overline{v'^2}/U_\infty^2 \approx -7 \times 10^{-3}$ .

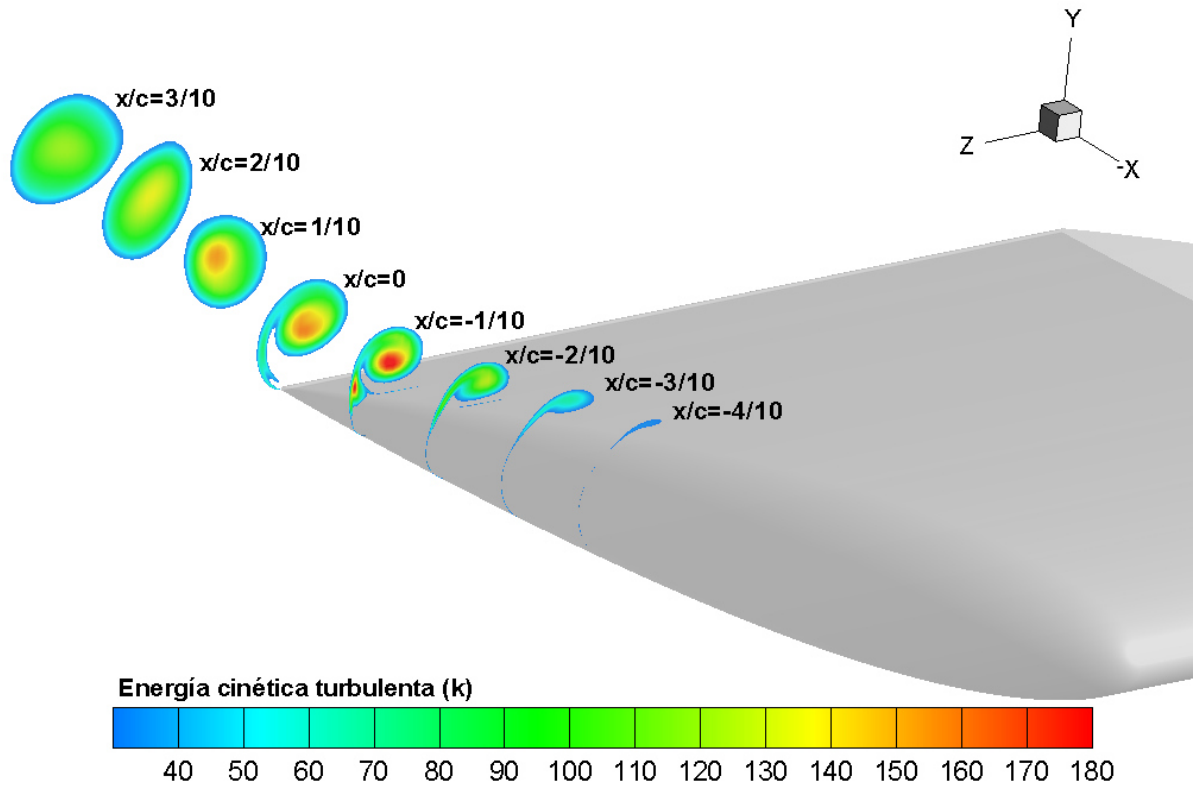
Como se mencionó anteriormente, Boussinesq sugirió que los esfuerzos cortantes turbulentos aparentes podrían estar relacionados con la viscosidad turbulenta  $\mu_T$  y la energía cinética turbulenta  $\bar{k}$ . La mejor manera de caracterizar la turbulencia del vórtice es a partir de la energía cinética turbulenta  $\bar{k}$  obtenida de los datos del campo de velocidad, lo que se





**Figura 6.8:** Contorno de la componente de los esfuerzos de Reynolds normalizados con respecto al cuadrado de la velocidad de la corriente libre  $U_\infty^2$  para el plano  $x/c = 0$ . (a)  $\overline{u'^2}/U_\infty^2$ , (b)  $\overline{u'v'}/U_\infty^2$ , (c)  $\overline{u'w'}/U_\infty^2$ , (d)  $\overline{v'^2}/U_\infty^2$ , (e)  $\overline{v'w'}/U_\infty^2$ , (f)  $\overline{w'^2}/U_\infty^2$ .

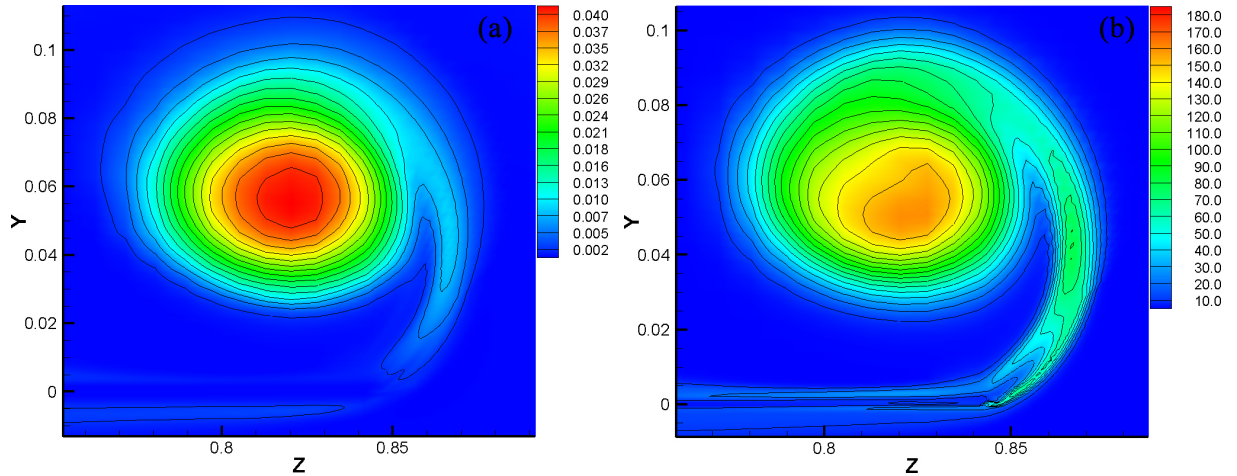




**Figura 6.9:** Distribución de la energía cinética turbulenta  $\bar{k}$  para diferentes planos transversales a lo largo del ala de punta circular

muestra en la figura 6.9 para diferentes planos transversales al flujo. La energía cinética turbulenta,  $\bar{k}$ , cuantifica la energía contenida dentro de la parte turbulenta del flujo y su distribución comienza a tener importancia a partir del plano  $x/c = -4/10$ . A medida que el flujo se desplaza corriente abajo, la magnitud de  $\bar{k}$  se incrementa hasta alcanzar un valor máximo de  $180 m^2/s^2$  cuando  $x/c = -1/10$ , medido desde el centro del vórtice. Posteriormente, comienza a disiparse hasta difundirse corriente abajo. Asimismo, a medida que nos desplazamos corriente abajo, las fluctuaciones afectan a una región mayor. Es importante observar la presencia de vórtices secundarios los cuales intensifican la magnitud de la energía cinética turbulenta del flujo en el plano  $x/c = -1/10$ .

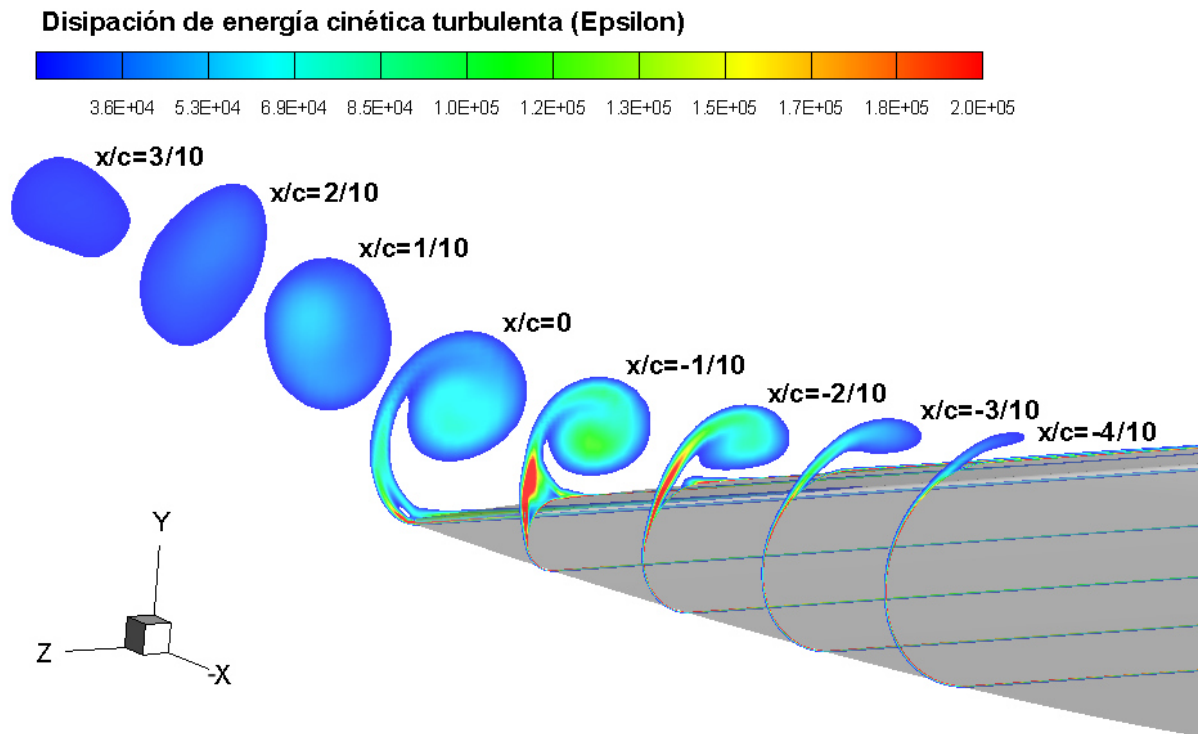
A medida que el vórtice evoluciona cuando se traslada corriente abajo, a partir del



**Figura 6.10:** Distribución para el plano  $x/c = 0$  de la (a) Viscosidad turbulenta  $\nu_T$ , (b) la energía cinética turbulenta  $\bar{k}$ .

plano  $x/c = 0$  comienza a presentar simetría axial. En la figura 6.10 se muestran los contornos de la distribución de: (a) viscosidad turbulenta  $\mu_T$  y (b) la energía cinética turbulenta  $\bar{k}$ , en el plano  $x/c = 0$ . La intensidad de la energía cinética turbulenta presenta un valor máximo en el centro del núcleo del vórtice, con altos niveles de turbulencia en la periferia del núcleo ( $r_{core} = 0.049c$ ). La distribución de la viscosidad turbulenta  $\mu_T$  alcanza un valor máximo de  $0.04 \text{ kg/ms}$  en el centro del vórtice y disminuye radialmente a medida que nos alejamos de él.

La segunda invarianza del tensor del gradiente de velocidad  $\Pi = 0.5 (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})$ , donde  $S_{ij}$  y  $\Omega_{ij}$  son el tensor de la deformación media y el tensor de la rotación media, respectivamente, es un excelente indicador de la presencia de vórtices secundarios en el flujo [17]. En regiones de dominio de rotación, tales como un vórtice, típicamente  $\Pi > 0$ . El segundo término de la ecuación de la segunda invarianza, representa la pérdida de invarianza debido a la disipación de la energía cinética turbulenta  $\varepsilon$ . Una vez que el flujo se ha constituido en turbulento, la turbulencia tiende a disiparse de manera rápida debido a los esfuerzos viscosos producidos por la superficie del ala, reduciendo la posibilidad de la formación de nuevos vórtices de gran escala en el dominio.



**Figura 6.11:** Distribución de la disipación de la energía cinética turbulenta,  $\varepsilon$ , para diferentes planos transversales a lo largo del ala de punta circular

La disipación de la energía cinética turbulenta  $\varepsilon$  comienza a tomar importancia a partir del plano  $-4/10$ , como se observa en la figura 6.11. En la zona donde los vórtices secundarios y terciarios son más dominantes,  $\varepsilon$  es máxima, obteniendo una magnitud del orden  $2 \times 10^5$ , posteriormente, la magnitud de la disipación de la energía cinética turbulenta comienza a disminuir a medida que nos alejamos del borde de salida.

## 6.3. Resultados Wingtip Rectangular

### 6.3.1. Velocidad del Flujo Transversal

En un ala con punta rectangular, el desprendimiento del flujo transversal de la superficie de presión (intradós) a la superficie de succión (extradós) es forzado por dos bordes afilados situados en los extremos de la punta, evitando un desprendimiento suave del flujo. Por lo tanto, el número de vórtices debido a la separación se incrementa y su interacción genera un sistema de vorticidad dependiente de  $x/c$  que promueve la mezcla de la espiral del vórtice dominante.

En la figura 6.12 se presentan los contornos de la velocidad transversal a la dirección axial normalizada con la velocidad de la corriente libre  $U_{yz}/U_\infty$  en diferentes planos transversales a la dirección axial. El enrollamiento del flujo sobre la superficie de la punta del ala comienza a presentarse a partir del plano  $x/c = -9/10$ . El desprendimiento de la capa límite es abrupto en la superficie afilada de la punta, generando dos vórtices secundarios de corriente opuesta, que se intensifica como zonas de baja magnitud de velocidad, con un decaimiento en la velocidad transversal de  $U_{yz}/U_\infty \approx 0.1$ . Inicialmente los dos vórtices secundarios comienzan a evolucionar de manera independiente. En el caso donde  $x/c = -7/10$  y  $x/c = -5/10$ , los dos vórtices secundarios crecen y ascienden hacia la zona de succión, mientras que un tercer vórtice secundario se genera en la región cercana a la punta afilada superior, con un decaimiento en la velocidad transversal de  $U_{yz}/U_\infty \approx 0.1$ . Corriente abajo, el vórtice primario se desplaza de la superficie de presión a la superficie de succión, con una velocidad transversal media de  $U_{yz,m}/U_\infty \approx 0.65$ . En la región cercana al borde de salida, donde  $x/c = -3/10$  y  $x/c = -1/10$ , la espiral no se enrolla en su totalidad debido a la existencia de vórtices secundarios, los cuales son arrastrados hacia el centro del vórtice primario. Los vórtices secundarios desarrollan una zona de inestabilidad en el borde de salida ( $x/c = 0$ ), incrementando el tamaño del vórtice dominante,

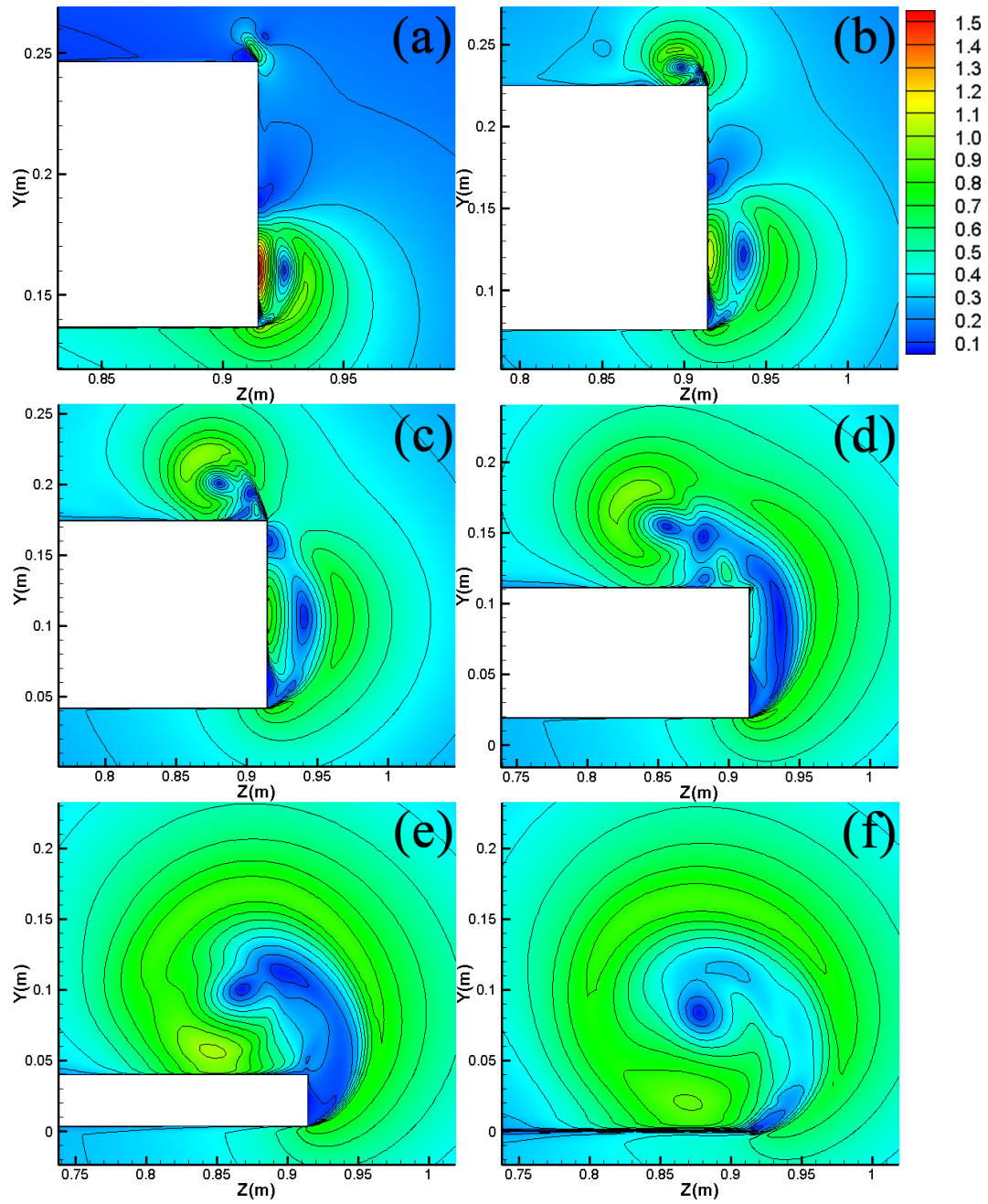
y reduciendo la velocidad transversal a  $U_{yz,max}/U_\infty \approx 0.65$  en la frontera del núcleo del vórtice.

### 6.3.2. Componente Axial de la Vorticidad

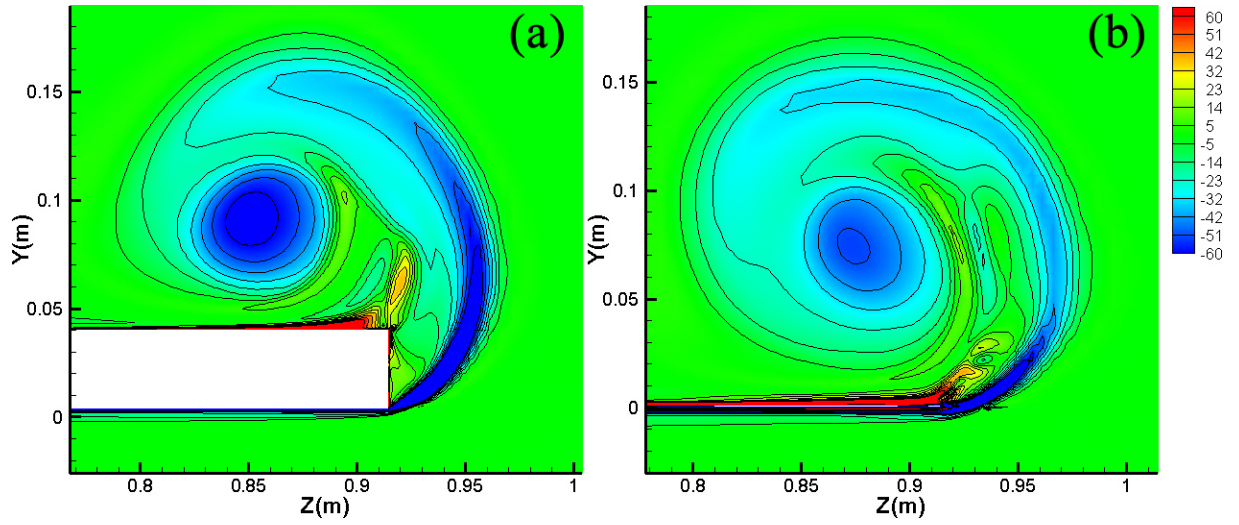
La presencia de vórtices secundarios genera un alto nivel de inestabilidad sobre el vórtice primario, alterando su formación e incrementando el tamaño de la espiral. La rotación del flujo en forma de espiral desarrolla un dominio de alta vorticidad de signo negativo en la superficie de succión. La componente axial de la vorticidad  $\omega_x c/U_\infty$  se muestra en los planos  $x/c = -1/10$  y  $x/c = 0$  de la figura 6.13. Para el caso (a) de la figura 6.13, el flujo proveniente de la superficie de presión presenta alta vorticidad de signo negativo ( $\omega_x c/U_\infty \approx -500$ ) y disminuye rápidamente a medida que el flujo asciende hacia la superficie de succión. Cuando el flujo se enrolla alrededor del núcleo del vórtice, la vorticidad axial aumenta hasta  $\omega_x c/U_\infty \approx -60$ . La forma del enrollamiento de la hoja de vorticidad es afectada por la presencia de los vórtices secundarios, que es posible identificar como pequeñas zonas de alta vorticidad de signos opuestos que alteran la formación y el crecimiento del vórtice primario. Estas pequeñas zonas de alta vorticidad son arrastradas hacia el centro del vórtice primario a medida que el flujo se traslada corriente abajo en la dirección axial, presentando un decaimiento en la magnitud de la vorticidad y un incremento en el tamaño de la espiral.

### 6.3.3. Coeficiente de Presión Estática

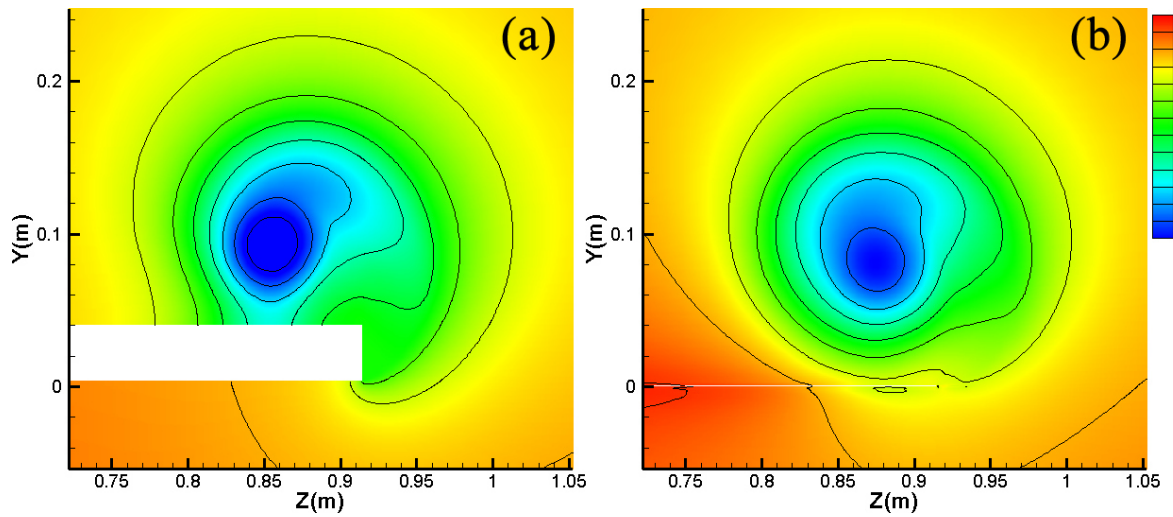
En la figura 6.14, la distribución del coeficiente de presión estática  $C_p$  es mostrado en dos planos transversales a la dirección axial del vórtice de salida (a)  $x/c = -1/10$  y (b)  $x/c = 0$ . El coeficiente de presión estática en el centro del núcleo del vórtice decae hasta un  $C_p = -1.7$  en  $x/c = -1/10$ , y  $C_p = -1.44$  en  $x/c = 0$ . La existencia de vórtices secundarios afecta en gran medida el decaimiento del coeficiente de presión estática en el



**Figura 6.12:** Distribución de la componente de la velocidad transversal normalizada con la velocidad de la corriente libre  $U_{yz}/U_{\infty}$ , para los planos (a)  $x/c = -5/10$ , (b)  $x/c = -4/10$ , (c)  $x/c = -3/10$ , (d)  $x/c = -2/10$ , (e)  $x/c = -1/10$ , (f)  $x/c = 0$



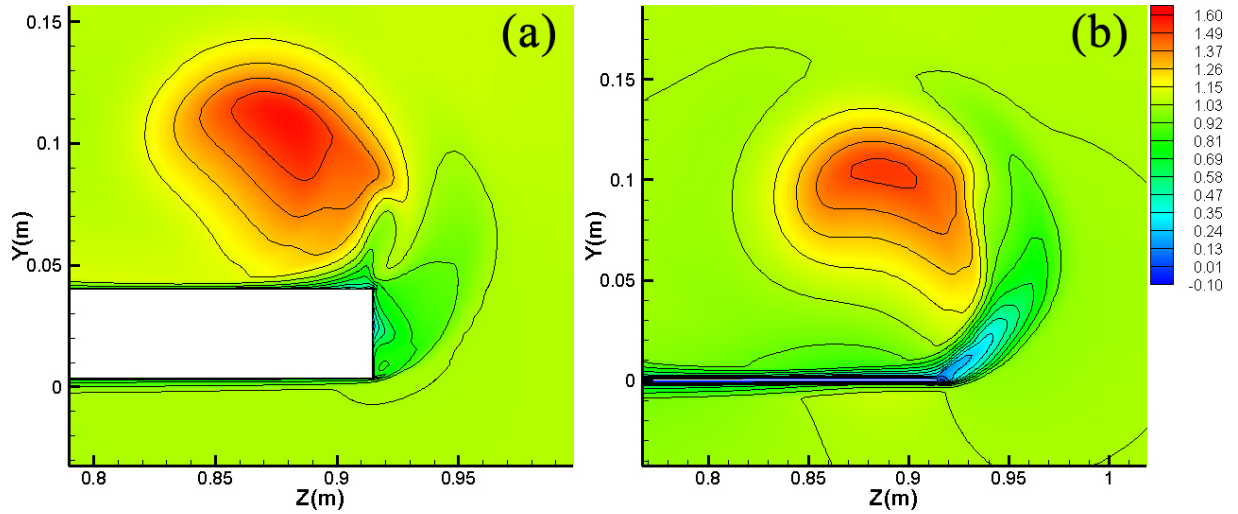
**Figura 6.13:** Distribución de la componente axial de la vorticidad  $c\omega_x/U_\infty$ , para los planos (a)  $x/c = -1/10$ , (b)  $x/c = 0$ .



**Figura 6.14:** Distribución del coeficiente de presión  $C_p$ , para los planos (a)  $x/c = -1/10$ , (b)  $x/c = 0$ .

núcleo del vórtice de salida. El ala con punta circular produce mayor decaimiento en el coeficiente de presión estática respecto al ala con punta rectangular. Sin embargo, el ala con punta rectangular produce una región de distribución de presión estática más grande respecto al ala con punta circular.





**Figura 6.15:** Distribución de la componente axial de la velocidad  $U_a/U_\infty$ , para los planos (a)  $x/c = -1/10$ , (b)  $x/c = 0$ .

#### 6.3.4. Velocidad Axial

Para el caso de la geometría con punta rectangular, se presenta una velocidad axial máxima de  $U_a/U_\infty \approx 1.6$  en el centro del vórtice de salida. La geometría con extremo rectangular presenta una variación más amplia respecto a la que se presenta en la geometría con extremo circular, como se observa en la figura 6.15.

#### 6.3.5. Propiedades de la Turbulencia

Con referencia al plano cartesiano, los contornos de los esfuerzos de Reynolds normales y cortantes son ilustrados en planos transversales a la dirección axial. La figura 6.8 muestra la distribución de las componentes de los esfuerzos de Reynolds normalizados con el cuadrado de la velocidad de corriente libre en el plano  $x/c = 0$ , para el caso del ala con extremo rectangular, para (a)  $\overline{u'^2}/U_\infty^2$ , (b)  $\overline{u'v'}/U_\infty^2$ , (c)  $\overline{u'w'}/U_\infty^2$ , (d)  $\overline{v'^2}/U_\infty^2$ , (e)  $\overline{v'w'}/U_\infty^2$ , (f)  $\overline{w'^2}/U_\infty^2$ .

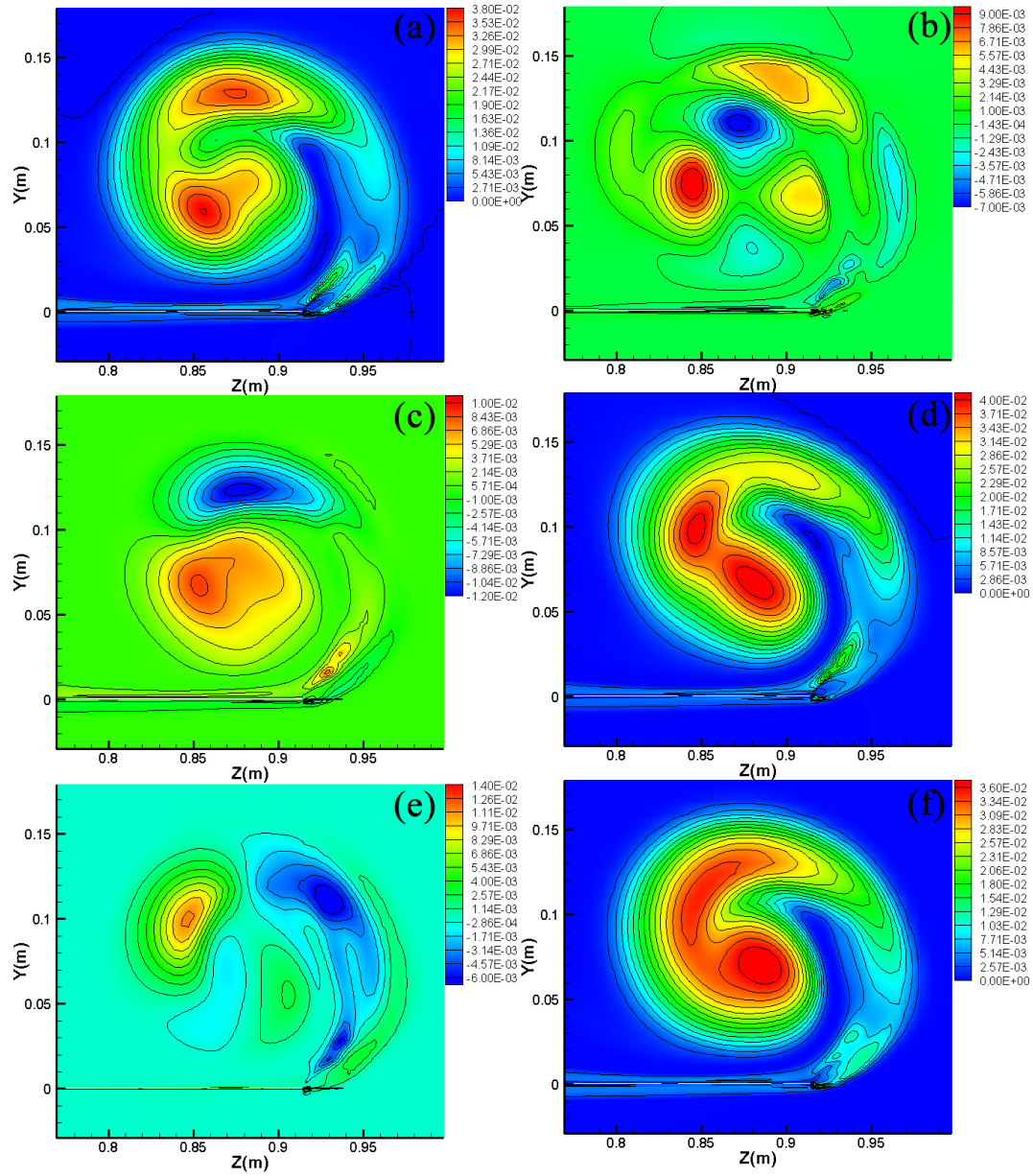
En la zona del núcleo del vórtice de salida, las componentes de los esfuerzos normales



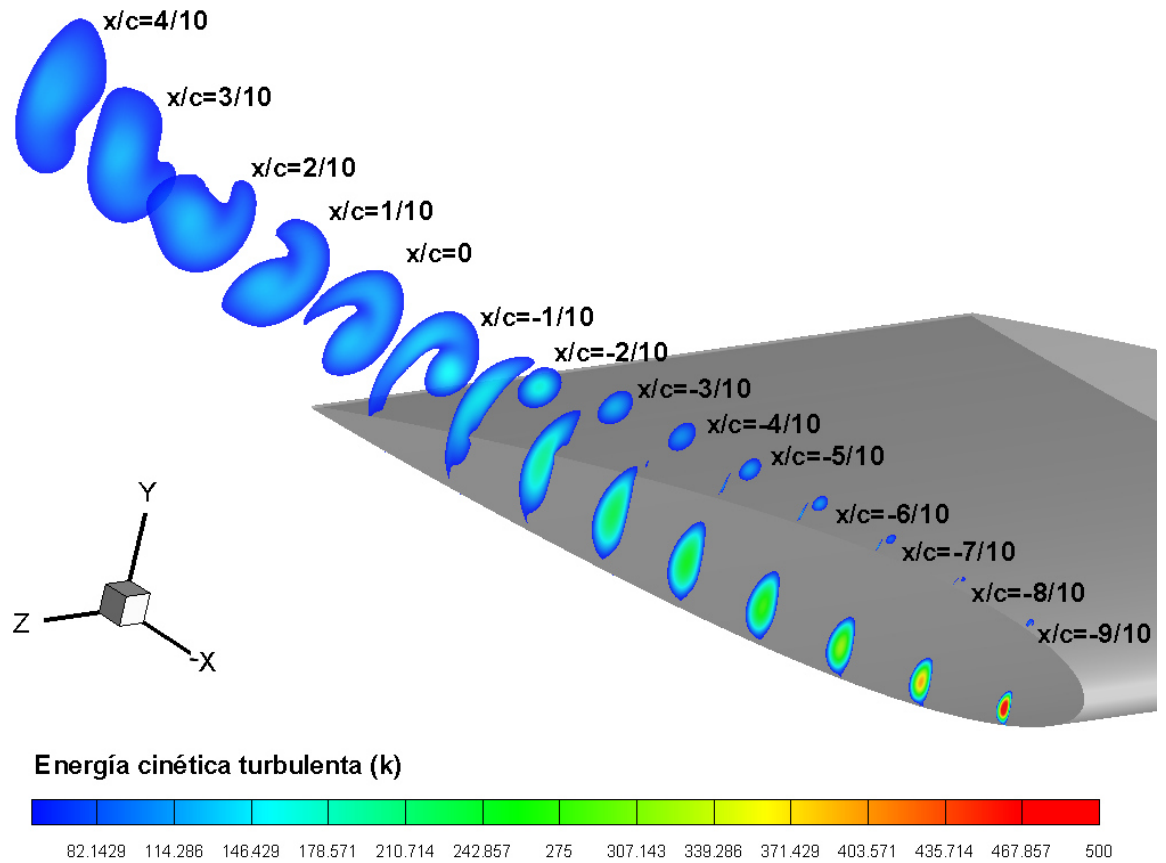
$\overline{u'^2}/U_\infty^2$ ,  $\overline{v'^2}/U_\infty^2$  y  $\overline{w'^2}/U_\infty^2$ , a diferencia del caso del ala de punta circular, muestran dos zonas de esfuerzo considerable. La componente  $\overline{u'v'}/U_\infty^2$  presenta un patrón de trébol de cuatro hojas con cambios de signo alternados entre cada par contiguo de hojas, mostrando dos hojas de alto esfuerzo y dos hojas de bajo esfuerzo, las cuatro hojas con distinta magnitud en la distribución la componente de esfuerzo. La componente  $\overline{u'w'}/U_\infty^2$  presenta dos regiones de signos opuestos (+ y -), una más grande y de mayor magnitud que la otra. La componente de esfuerzo  $\overline{v'w'}/U_\infty^2$  presenta dos zonas no simétricas de alta cantidad de esfuerzo y de signos opuestos y dos zonas de bajo esfuerzo.

En la figura 6.16 se muestra la distribución de la energía cinética turbulenta  $\bar{k}$  para el caso del ala con punta rectangular para diferentes planos transversales al flujo. Cuando la punta del ala es de forma rectangular, la magnitud de la energía cinética es mayor con respecto a la obtenida al ala con punta circular. Un nivel elevado de turbulencia se presenta en la región cercana al borde de ataque ( $x/c = -9/10$ ) debido a la presencia de los vórtices secundarios en esta región  $\bar{k} \approx 500 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Corriente abajo, la distribución de la energía cinética turbulenta se disipa. A diferencia de la geometría del ala con punta circular, la distribución de  $k$  no presenta un comportamiento axisimétrico en la etapa temprana. La distribución de  $\bar{k}$  comienza a rotar en forma de espiral a medida que se desplaza corriente abajo, disipándose continuamente.

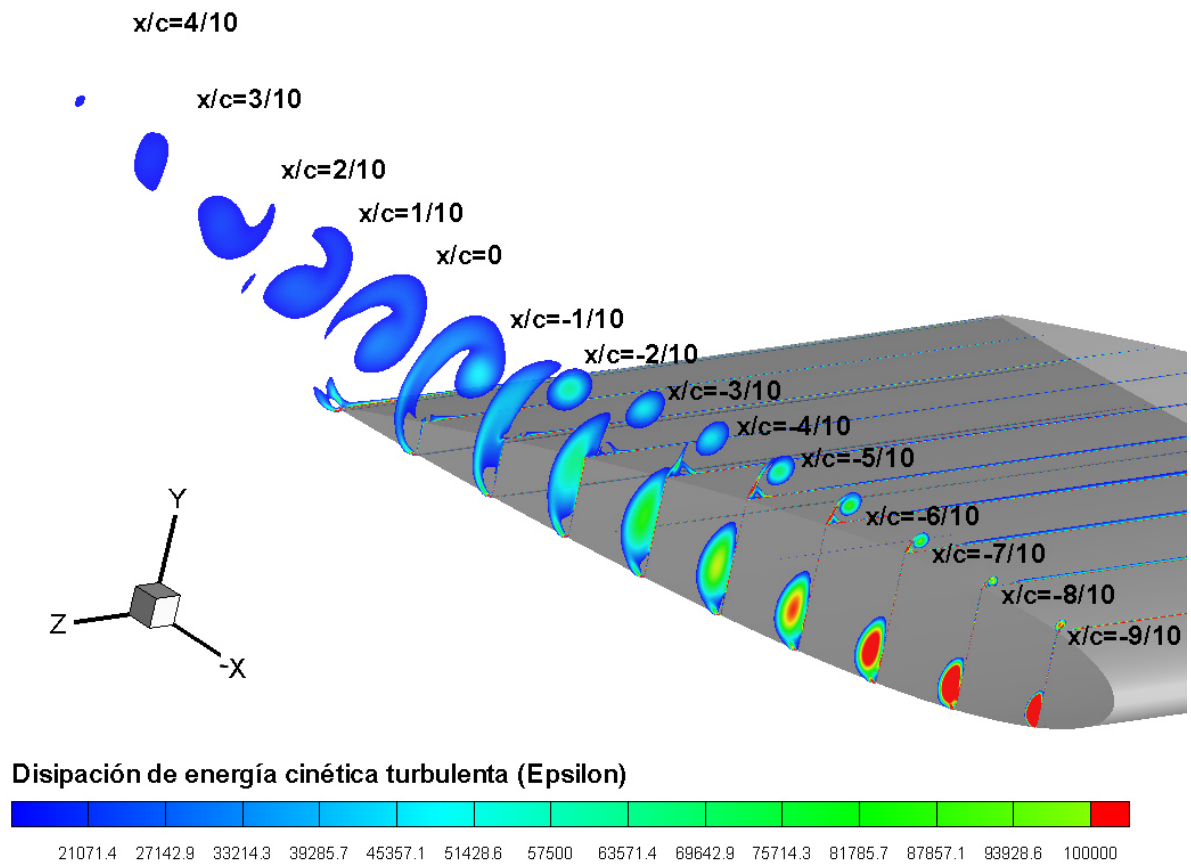
La disipación de la energía cinética turbulenta  $\varepsilon$ , a lo largo de diferentes planos transversales al flujo se muestra en la figura 6.17. La disipación de la energía cinética turbulenta,  $\varepsilon$ , es intensa en la región cercana al borde de ataque ( $-9/10 < x/c < -7/10$ ), con un orden de magnitud de  $10^6$ . A medida que el flujo se desplaza corriente abajo, la magnitud de  $\varepsilon$  disminuye rápidamente hasta obtener un  $\varepsilon \approx 1 \times 10^5$  en el plano  $-6/10$ . A partir del plano  $-5/10$ ,  $\varepsilon$  se disipa y asciende hacia la superficie de succión. A partir del plano  $-2/10$ ,  $\varepsilon$  se desprende de la superficie de succión formando una espiral la cual se enrolla a medida que el flujo se desplaza corriente abajo.



**Figura 6.16:** Distribución de la componente de los esfuerzos de Reynolds normalizados con respecto al cuadrado de la velocidad de la corriente libre  $U_\infty^2$  para el plano  $x/c = 0$ . (a)  $uu/U_\infty^2$ , (b)  $uv/U_\infty^2$ , (c)  $uw/U_\infty^2$ , (d)  $vv/U_\infty^2$ , (e)  $vw/U_\infty^2$ , (f)  $ww/U_\infty^2$ .



**Figura 6.17:** Distribución de la energía cinética turbulenta  $\bar{k}$  para diferentes planos transversales a lo largo del ala de punta circular



**Figura 6.18:** Distribución de la disipación de la energía cinética turbulenta  $\varepsilon$  para diferentes planos transversales a lo largo del ala de punta circular

## CAPÍTULO

### 7

# CONCLUSIONES

### 7.1. Conclusiones

Se realizó un estudio numérico de un flujo subsónico e incompresible, particularmente enfocado a la formación del vórtice de salida para un ala recta de cuerda geométrica constante. Se analizó el efecto de las modificaciones en la geometría redondeada en el extremo del ala, y su efecto sobre su desarrollo inicial y evolución en un campo cercano, con un número de Reynolds ( $Re = 4.6 \times 10^6$ ).

El análisis se realizó empleando como herramienta a la Dinámica de Fluidos Computacional. En el estudio, se analizan dos casos importantes, la evolución del vórtice de salida en un ala con punta rectangular y en un ala con punta circular. El diseño de las

semi-alas son de sección simétrica con perfil aerodinámico NACA 0012, con alargamiento  $AR = 0.75$ . Basándonos en los estudios realizados por Matthew J. y Chow et al. [17, 22], el dominio computacional consiste en un prisma rectangular que representa el campo de flujo que ocupa el volumen interno de la sección de pruebas del túnel de viento del experimento. Se realizó la discretización del dominio para ambas geometrías, las cuales exponen un  $y^+ \sim 20.6$ , aconsejable para obtener excelentes resultados en las simulaciones.

Se revisó la veracidad de los modelos de turbulencia Spalart-Allmaras (SA) y el modelo de turbulencia Shear Stress Transport (SST) utilizando dos esquemas: Quick y Upwind de segundo orden. Se validaron los resultados numéricos mediante la comparación con datos experimentales presentados en la literatura. La utilización de un modelo de turbulencia de dos ecuaciones, exhibe mayor decaimiento en el coeficiente de presión estática medible en el centro del vórtice, con respecto a los modelos de turbulencia de una sola ecuación. Sin embargo, ambos modelos no predicen con exactitud la tendencia del coeficiente de presión estática en un campo cercano. Los modelos de turbulencia SA y SST emplean la hipótesis de Boussinesq, los cuales consideran que los esfuerzos cortantes turbulentos aparentes están relacionados con el rango de la deformación media a través de un escalar turbulento aparente o la viscosidad de *Eddy*. Los resultados experimentales indican que las mediciones del tensor de esfuerzos de Reynolds no es directamente proporcional al rango de la velocidad de deformación media. Esto implica que una aproximación de viscosidad turbulenta (constante o isotrópica), es probable que no presente con éxito la solución del flujo del vórtice de salida.

Los resultados obtenidos a partir del modelado computacional utilizando el modelo de turbulencia SST muestran que en la superficie de succión del ala se crea un vórtice de salida primario, esto ocurre cuando el gradiente de presión adverso es lo suficientemente intenso y el radio de curvatura en el extremo del ala es lo suficientemente grande para inducir la separación del flujo transversal sobre la superficie del ala. El campo de flujo de rotación del vórtice de salida primario induce pequeños vórtices secundarios, los cuales

rotan en dirección opuesta al vórtice primario sobre la superficie de succión.

Para el caso de un ala recta con punta circular, el vórtice de salida no es evidente en la región acotada entre el LE y el 50 % de la cuerda geométrica. A medida que el flujo se desplaza corriente abajo a lo largo de la cuerda geométrica, el flujo transversal se desprende de la superficie de succión induciendo el desarrollo de un vórtice de salida primario alcanzando una velocidad transversal máxima de  $U_{y,z}/U_{\infty} \approx 1.2$ . La presencia de vórtices secundarios y terciarios son evidentes en la región cercana al borde de salida, los cuales son identificados como zonas de alta vorticidad. Estos pequeños vórtices se disipan a medida que son arrastrados por el vórtice primario. La inestabilidad de los vórtices secundarios y terciarios no es dominante, permitiendo que las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds muestren simetría espacial en una etapa temprana. Esto permite que las componentes de esfuerzos normales presenten una distribución radial con valor máximo en el centro del vórtice y las componentes de esfuerzos cortantes presenten un patrón de regiones simétricas alternadas de signos opuestos.

Por otra parte, un ala con punta rectangular presenta en su extremo dos bordes afilados, donde el desprendimiento del flujo es abrupto, produciendo un vórtice de salida con múltiples vórtices secundarios altamente inestables en la región cercana al borde de ataque. La inestabilidad del vórtice primario ocurre debido a la interacción de los vórtices secundarios. Además, la espiral del vórtice no se enrolla en su totalidad, incrementando el tamaño del vórtice primario, y reduciendo su velocidad transversal. La alta inestabilidad presenta una distribución distinta de las componentes de los esfuerzos de Reynolds. Las componentes de los esfuerzos normales a diferencia del caso del ala de punta circular, muestran dos zonas de esfuerzo considerables, y las componentes de esfuerzo cortantes muestran un patrón de regiones no simétricas alternadas de signos opuestos.

La existencia de vórtices secundarios y terciarios afecta en gran medida el decaimiento del coeficiente de presión estática en el núcleo del vórtice de salida. El ala con punta circular produce mayor decaimiento en el coeficiente de presión estática respecto al ala

con punta rectangular. Sin embargo, el ala con punta rectangular produce una región de distribución de presión estática más grande con respecto al ala con punta circular.

A partir de los análisis de los resultados obtenidos para la energía cinética turbulenta y la disipación, es posible hacer conjeturas que permiten predecir la evolución del vórtice. Los niveles más altos de energía cinética turbulenta se encuentran en el centro del vórtice primario para ambas geometrías. Se ha observado que la capa de esfuerzos cortantes y la interacción entre los vórtices primario y secundarios son fuentes importantes de actividad de inestabilidad en el núcleo para un ángulo de ataque de 10. A medida que el vórtice primario se desplaza corriente abajo, se convierte en un vórtice con simetría axial, y consigue un descenso en el nivel de turbulencia. Este efecto es mas evidente en el ala con punta circular en una etapa temprana. En el otro caso, cuando la punta es rectangular, la alta inestabilidad retrasa la propiedad axisimétrica del vórtice dominante.

Durante la formación del vórtice sobre el ala, la turbulencia procedente del flujo transversal es arrastrada hacia el núcleo del vórtice, resultando en un núcleo turbulento en una etapa temprana. Aunque la turbulencia es generada por los gradientes de velocidad axial media corriente abajo desde el borde de salida, la influencia de la relaminarización disipa rápidamente la turbulencia en el núcleo corriente abajo desde el borde de salida. La producción de turbulencia durante este proceso está directamente relacionada con el gradiente radial del flujo axial, tal como argumenta Chow et al. [22]. La dirección del flujo axial y la intensidad del vórtice juega un papel importante en la evolución temprana del vórtice de salida.

## **7.2. Trabajo Futuro**

Aunque las geometrías de prueba en esta tesis son muy simples, ponen de manifiesto la complejidad y lo básico de este mecanismo fundamental de la formación de vórtices proporcionando un punto de referencia importante para el análisis numérico futuro en el



flujo alrededor de la punta de las alas.

Es importante mencionar que los modelos de turbulencia basados en el principio de Boussinesq no permiten estudiar de manera precisa el comportamiento del vórtice de salida en una etapa temprana. Por ello, se recomienda mejorar la técnica del modelado de la turbulencia, realizando modificaciones en los términos de producción de las ecuaciones de transporte de la energía cinética turbulenta, la disipación de la energía cinética turbulenta y la viscosidad turbulenta.

Se tienen varios puntos que se recomiendan mejorar y otros que se deben agregar en el análisis de vórtice de salida:

1. Mejorar la técnica de discretización del dominio geométrico.
2. Variar la excentricidad de la punta en el extremo del ala.
3. Estudiar el comportamiento del vórtice de salida para diferentes número de Reynolds y a diferentes ángulos de ataque.
4. Diseñar un código numérico que determine el coeficiente de la resistencia inducida y el coeficiente de sustentación en términos de la componente de la vorticidad axial.

Se propone realizar un estudio experimental del fenómeno del vórtice de salida y los flujos errantes presentes en el medio, en un túnel de viento abierto, caracterizando el campo de la velocidad del flujo utilizando la técnica de velocimetría de imagen de partículas de alta resolución y la anemometría de hilo caliente.

Una manera de poder reducir el coeficiente de la resistencia inducida es proponiendo la interacción de campos electromagnéticos y el flujo proveniente de la corriente libre sobre la punta alar. Es importante mencionar que es requisito que el fluido este ionizado. La interacción entre un campo magnético, un campo eléctrico y un flujo ionizado inducen una Fuerza de Lorentz. Estas fuerzas alteran el campo de velocidades del fluido generando una relaminarización del flujo. Este estudio se puede lograr experimentalmente acoplando un

conjunto de imanes y electrodos sobre la superficie de la punta del ala. Se plantea estudiar este fenómeno sobre un ala de punta circular y rectangular para diferentes números de Reynolds y diferentes ángulos de ataque en un túnel de viento subsónico.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] **A. S. Ginevsky, A. I. Zhelannikov**, *Vortex Wakes of Aircrafts*, Foundations of Engineering Mechanics, Springer.
- [2] **Rossow, V. J.**, *Lift - Generated Vortex Wakes of Subsonic Transport Aircraft*, Progress in Aerospace Sciences, Vol. 35, No. 6, Aug. 1999, pp. 507 - 660.
- [3] **Airbus A380 Wake Vortex - Revised Guidance Material**, *The Fifth Meeting of the FANS Implementation Team (FIT-SEA/5)*, International Civil Aviation Organization, Bangkok, Thailand, Jan. 2006.
- [4] **S.I. Green**, *Fluid vortices*, in: *Fluid Mechanics and Its Applications*, Kluwer Academic Publisher, 1995. pp. 427-470.
- [5] **Chigier, N. A., and Corsiglia, V. R.**, *Tip Vortices-Velocity Distributions*, NASATM X-62-087 (1971).

- 
- [6] **Corsiglia, V. R., Schwind, R. G., and Chigier, N. A.,** *Rapid Scanning Three-Dimensional Hot-Wire Anemometer Surveys of Wing Tip Vortices*, Journal of Aircraft, Vol. 10, No. 12 (1973) pp. 752-757.
  - [7] **Orloff, K. L.,** *Trailing Vortex Wind-Tunnel Diagnostics with a Laser Velocimeter*, Journal of Aircraft, Vol. 11, No. 8 (1974), pp. 477-482.
  - [8] **Thompson, D. H.,** *Experimental Study of Axial Flow in Wing Tip Vortices*, Journal of Aircraft, Vol. 12, No. 11 (1975), pp. 910-911.
  - [9] **McAlister, K., and Takahashi, R.,** *NACA0015 Wing Pressure and Trailing Vortex Measurements*, NASATP 3151 (1991).
  - [10] **Devenport, W. Rife, M. Stergios I. and Follin G.,** *The Struscture and Development of aWing-Tip Vortex*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 312, (1996), pp. 671.
  - [11] **J. Katz, J. Bueno Galdo,** *Effect of Roughness on Rollup of tip Vortices on a Rectangular Hydrofoil*, Journal of Aircraft, Vol. 26, No. 3 (1989), pp. 247-253.
  - [12] **S.C.C. Bailey, S. Tavoularis,** *Effects of Freestream Turbulence on Wing-Tip Vortex Formation and Near Field*, Journal of Aircraft, Vol. 43,(2006), No.5.
  - [13] **A. Shekarriz, T. C. Fu, J. Katz and T.T. Huang,** *Near-Field Behavior of a Tip Vortex*, AIAA Journal, Vol. 31, No. 1, January 1993.
  - [14] **Michea Giuni, Richard B. Green,** *Vortex formation on squared and rounded tip*, Aerospace Science and Technology. Vol. 29 (2013).
  - [15] **Lee, T., Birch, D., Mokhtarian, F., and Kafayeke, F.,** *Structure and Induced Drag of a TipVortex*, Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 5 (2004) pp. 1138-1145.
  - [16] **T. Lee and J. Pereira ,** *"Nature of Wakelike and Jetlike Axial Tip Vortex Flows"*, Journal of Aircraft, Vol. 47, No. 6 (2010).
-

- 
- [17] **Mathew J. Churchfield and Gregory A. Blaisdell** *Numerical Simulations of a Wingtip Vortex in the Near Field*, Journal of Aircraft, Vol. 46, No. 1 (2009).
  - [18] **Dacles-Mariani, J., Kwak, D., and Zilliac, G. G.**, *On Numerical Errors and Turbulence Modeling in Tip Vortex Flow Prediction*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 30 (1999) pp. 65-82.
  - [19] **Dacles-Mariani, J., Zilliac, G. G., Chow, J. S., and Bradshaw, P.**, *Numerical/Experimental Study of a Wingtip Vortex in the Near Field*, AIAA Journal, Vol. 33, No. 9, Sept. 1995, pp. 1561-1568.
  - [20] **Kim, S., and Rhee, S.**, *Prediction of Tip-Vortex Flow Past a Finite Wing*, AIAA Paper 2005-0058 (2005).
  - [21] **Giacomo Valerio Iungo, Peter Skinner, Guido Buresti**, *Correction of wandering smoothing effects on static measurements*, Exp Fluids (2009) 46:435-452.
  - [22] **Jim S. Chow, Gregory G. Zilliac and Peter Bradshaw**, *Mean and Turbulence Measurements in the Near Field of a Wingtip Vortex*, AIAA Journal, Vol. 35, No. 10 (1997).
  - [23] **Jim S. Chow, Gregory G. Zilliac and Peter Bradshaw**, *Turbulence Measurements in the Near Field of a Wingtip Vortex*, NASA Technical Memorandum 110418,(1997).
  - [24] **J. S. Chow, G. G. Zilliac, P. Bradshaw**, *Initial Roll-Up of a Wingtip Vortex*, in: *Proceedings of the aircraft wake vortices conference*, vol. 2, Federal Aviation Administration, 1992.
  - [25] **P. Freymuth, F. Finaish, W. Bank**, *Visualization of wing tip vortices in accelerating and steady flow*, Journal of Aircraft 23 (9)(1986) 730-733.
-

- 
- [26] **M. H. Sohn, J. W. Chang**, *Visualization and PIV study of wingtip vortices for three different tip configurations*, Aerospace Science and Technology in press.
  - [27] **D. Birch, T. Lee, F. Mokhtarian, F. Kafyeke**, *Rollup and nearfield behavior of a tip vortex*, Journal of Aircraft 40 (3) (2003) 603-607.
  - [28] **Ramaprian, B., and Zheng, Y.**, *Measurements in Rollup Region of the Tip Vortex from a Rectangular Wing*, AIAA Journal, Vol. 35, No. 12 (1997) pp. 1837-1843.
  - [29] **John D. Anderson, Jr.**, *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill Higher Education, Third Edition.
  - [30] **C. Karakus, H. Akilli, B. Sahin**, *Formation, structure, and development of the near-field wing tip vortices*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering 222 (2008) 13-22.
  - [31] **L. Zuhail, M. Gharib**, *Near field dynamics of wing tip vortices*, in: 31st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, AIAA, Anaheim, CA, 2001.
  - [32] **Hirofumi Igarashi**, *A stereoscopic PIV study on the behavior of near-field wingtip vortex structures*, Graduate Theses and Dissertations. Paper 12080 (2011).
  - [33] **A. Abbas, J. de Vicente, E. Valero**, *Aerodynamic technologies to improve aircraft performance*, Aerospace Science and Technology.
  - [34] **A. Favre**, *Equations des Gaz Turbulents Compressibles: 1. Formes Générales*, J. Mec. vol. 4 (1965) pp. 361-390.
  - [35] **J. Boussinesq**, *Essai Sur La Théorie Des Eaux Courantes*, Mem. Présentés Acad. Sci. vol. 23 Paris (1877) p. 46.

- 
- [36] **C. Donaldson, H. Rosenbaum** , *Calculation of Turbulent Shear Flows Through Closure of the Reynolds Equations by Invariant Modeling*. Aero. Res. Assoc. of Princeton Report 127, (1968).
- [37] **M. R. Malik and R. H. Pletcher**, *A study of some turbulence models for flow and heat transfer in ducts of annular cross-section*, J. Heat Transfer vol. 103 (1981), pp. 146-152.
- [38] **B. E. Launder and D. B. Spalding**, *The Numerical Computation of Turbulent Flows*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. vol. 3 (1974) pp. 269-289.
- [39] **P. Bradshaw, D.H. Ferriss, N.D. Altwell**, *Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation*, J. Fluid Mech. vol. 28 (1967) pp. 593-616.
- [40] **V. W. Nee , L. S. G. Kovasznay**, *The Calculation of the Incompressible Turbulent Boundary Layer by a Simple Theory*, Phys. Fluids vol. 12, (1968) pp. 473-484.
- [41] **B. S. Baldwin, T. J. Barth**, *A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows*, NASA TM-102847.
- [42] **P. R. Spalart, S. R. Allmaras**, *One-equation turbulence model for aerodynamic flows*, AIAA Paper 92-0439 (1992).
- [43] **M. Mani, P. Willhite, J. Ladd**, *Performance of one-equation turbulence models in CFD applications*, AIAA Paper 95-2221 (1995).
- [44] **M. W. Rubesin**, *A one-equation model of turbulence for use with the compressible Navier-Stokes Equations*, NASA TM X-73-128.
- [45] **Batchelor, G.K.** , *Axial Flow in Trailing Line Vortices*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 20, 1964, pp. 645-658.

- 
- [46] **Moore, D.W., and Saffman, P.G.**, *Axial Flow in Laminar Trailing Vortices*. Proceedings Royal Society London, Vol. 333, June 1973, pp. 491-508.
- [47] **Ira. H. Abbott, Albert E. Von. Doenhoff**, *Theory of wing sections including a summary of airfoil data*, Dover Publications, Inc. New York.
- [48] **N. Gregory and C. L. O Reilly**, *Low-Speed aerodynamic characteristics of NACA0012 aerofoil section, including the effects of upper-surface roughness simulating hoar frost*, London: Her Majesty Stationery Office (1973).
- [49] **Mojtaba Ahmadi-Baloutaki, Rupp Cariveau, David S.-K. Ting**, *An experimental study on the interaction between free-stream turbulence and a wing-tip vortex in the near-field*, Aerospace Science and Technology, Vol. 43, June 2015, pp. 395 - 405.
- [50] **P. Margaris, I. Gursul**, *Vortex topology of wing tip blowing*, Aerospace Science and Technology, Vol. 14, Issue 3, April-May 2010, pp. 143-160.
- [51] **T.J. Craft, A.V. Gerasimov, B.E. Launder, C.M.E. Robinson**, *A computational study of the near-field generation and decay of wingtip vortices*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 27, Issue 4, August 2006, pp. 684 - 695.
- [52] **Jennifer S. Dacles-Mariani, Dochan Kwak, Gregory Zilliac**, *Accuracy assessment of a wintip vortex flowfield in the near-field region*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. January 1996, Paper 96-0208.
- [53] **Jiyuan Tu, Guan Heng Yeoh Chaoqun Liu**, *Computational Fluid Dynamics. A Practical Approach*, Elsevier, First edition 2008.